একাদশ অধ্যায়
বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত

অনুশীলনী ১১.১

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান : ১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার

$\therefore$ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গমিটার

এবং ২য় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = b মিটার

$\therefore$ ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = b^2 বর্গমিটার

$\therefore$ ১ম ও ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = $\frac{a^2}{b^2} = a^2 : b^2$

$\therefore$ তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = $a^2 : b^2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বৃত্তক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ = r মিটার

$\therefore$ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গমিটার

$\therefore$ বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$ মিটার

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $\sqrt{\pi r^2}$ মিটার = $\sqrt{\pi}r$ মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $4\sqrt{\pi}r$ মিটার

বৃত্তক্ষেত্রের ও বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার অনুপাত

$$= \frac{2\pi r}{4\sqrt{\pi}r} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} : 2 \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ল. সা. গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, সংখ্যাদ্বয় 3x ও 4x [অনুপাত অনুযায়ী)]

$\therefore$ সংখ্যাদ্বয়ের ল. সা. গু. = 12x

প্রশ্নমতে, 12x = 180

বা, $x = \frac{180}{12}$

$\therefore x = 15$

$\therefore$ সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে $(3 \times 15) = 45$

এবং $(4 \times 15) = 60$

নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 45 ও 60.

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত 1 : 4, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = x

এবং উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = 4x

$\therefore$ মোট ছাত্র সংখ্যা = (4x + x) জন = 5x জন

$\therefore$ অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার $\frac{x}{5x}$ অংশ

অর্থাৎ $\frac{\text{অনুপস্থিত ছাত্র}}{\text{মোট ছাত্র}} \times 100\% = \frac{x}{5x} \times 100\% = \left(\frac{1}{5} \times 100\right)\% = 20\%$

$\therefore$ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার 20%. **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে 28% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (100 – 28) বা 72 টাকা।

বিক্রয়মূল্য : ক্রয়মূল্য = $72 : 100 = \frac{72}{100}$

$= \frac{18}{25} = 18 : 25$

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত = 18 : 25. **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান : মনে করি, 7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল 5k বছর

এবং 7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল 2k বছর

এখানে, k অনুপাতের সাধারণ গুণিতক

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স (5k + 7) বছর

এবং বর্তমানে পুত্রের বয়স (2k + 7) বছর

আবার, 5 বছর পরে পিতার বয়স (5k + 7 + 5) বছর

= (5k + 12) বছর

এবং 5 বছর পরে পুত্রের বয়স (2k + 7 + 5) বছর

= (2k + 12) বছর

প্রশ্নানুসারে, (5k + 7) + (2k + 7) = 70

বা, 5k + 7 + 2k + 7 = 70

বা, 7k + 14 = 70

বা, 7k = 70 – 14 = 56

বা, $k = \frac{56}{7} = 8$

$\therefore k = 8$

$\therefore$ 5 বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত

$= (5 \times 8 + 12) : (2 \times 8 + 12)$

$= (40 + 12) : (16 + 12)$

$= 52 : 28$

$= 13 : 7$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ যদি a : b = b : c হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ **(ii)** $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$

(iii) $\frac{abc\,(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ **(iv)** $a-2b+c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$

সমাধান : (i) দেওয়া আছে a : b = b : c,

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

বামপক্ষ $= \frac{a}{c}$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ac}{ac+c^2}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{a\,(a+c)}{c\,(a+c)} = \frac{a}{c}$

অর্থাৎ, $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (প্রমাণিত)

(ii) দেওয়া আছে, a : b = b : c

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

বামপক্ষ $= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$= \frac{a^2b^2c^2}{a^3} + \frac{a^2b^2c^2}{b^3} + \frac{a^2b^2c^2}{c^3}$

$= \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{ac.\,c^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2.ac}{c}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{ac^3}{a} + \frac{b^4}{b} + \frac{a^3c}{c}$

$= c^3 + b^3 + a^3$

$= a^3 + b^3 + c^3$ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$ (প্রমাণিত)

(iii) দেওয়া আছে a : b = b : c

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

বামপক্ষ $= \frac{abc\,(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}$

$= \frac{b.\,b^2\,(a+b+c)^3}{(ab+bc+b^2)^3}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{b^3\,(a+b+c)^3}{\{b\,(a+c+b)\}^3} = \frac{b^3\,(a+b+c)^3}{b^3\,(a+b+c)^3}$

= 1 = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ (প্রমাণিত)

(iv) দেওয়া আছে, a ∶ b = b ∶ c

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

১ম পক্ষ $= a - 2b + c$

২য় পক্ষ $= \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a}$

$= \frac{a^2 - 2ab + ac}{a}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{a(a-2b+c)}{a} = a - 2b + c$

৩য় পক্ষ $= \frac{(b-c)^2}{c} = \frac{b^2 - 2bc + c^2}{c}$

$= \frac{ac - 2bc + c^2}{c}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{c(a-2b+c)}{c} = a - 2b + c$

অর্থাৎ, $a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ সমাধান কর :

(i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

(iii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$**, 2a > b > 0 এবং x ≠ 0.**

(iv) $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}} = 5$ **(v)** $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}} = c$

(vi) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

সমাধান : (i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\left(\sqrt{1-x}\right)} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$ [– 1 দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

বা, $2\sqrt{1-x} = 1$ [আড়গুণন করে]

বা, $\left(2\sqrt{1-x}\right)^2 = (1)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4\,(1-x) = 1$

বা, $4 - 4x = 1$

বা, $-4x = 1 - 4$

বা, $-4x = -3$

$\therefore x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right)^2 = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}$

বা, $\dfrac{a+x+a-x}{a+x-a+x} = \dfrac{b^2+2b+1+b^2-2b+1}{b^2+2b+1-b^2+2b-1}$

[পুনরায় যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2a}{2x} = \dfrac{2b^2+2}{4b}$

বা, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{2(b^2+1)}{4b}$

বা, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b^2+1}{2b}$

বা, $x(b^2+1) = 2ab$

$\therefore x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$

(iii) $\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{b}{x}$

বা, $\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2a+2x}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

বা, $\dfrac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

বা, $\dfrac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

বা, $\dfrac{(a+x)^2}{(-\sqrt{a^2-x^2})^2} = \dfrac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \dfrac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+b^2}$

বা, $\dfrac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2} = \dfrac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2a^2+2ax}{2ax+2x^2} = \dfrac{2b^2+2x^2}{4bx}$

বা, $\dfrac{2(a^2+ax)}{2(x^2+ax)} = \dfrac{2(x^2+b^2)}{2\times 2bx}$

বা, $\dfrac{a^2+ax}{x^2+ax} = \dfrac{x^2+b^2}{2bx}$

বা, $(x^2+b^2)(x^2+ax) = 2bx(a^2+ax)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x(x^2+b^2)(x+a) = 2abx(x+a)$

বা, $x^2+b^2 = 2ab$ [উভয়পক্ষকে $x(x+a)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 = 2ab - b^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{2ab-b^2}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm\sqrt{2ab-b^2}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}} = 5$

বা, $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}} = \dfrac{5+1}{5-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-6}} = \dfrac{6}{4}$

বা, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}} = \dfrac{3}{2}$

বা, $\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{x-1}{x-6} = \dfrac{9}{4}$

বা, $9x - 54 = 4x - 4$ [আড়গুণন করে]

বা, $9x - 4x = 54 - 4$

বা, $5x = 50$

বা, $x = \dfrac{50}{5}$

$\therefore x = 10$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 10$

(v) $\dfrac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}} = c$

বা, $\dfrac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}+\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}-\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}} = \dfrac{c+1}{c-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2\sqrt{ax+b}}{2\sqrt{ax-b}} = \dfrac{c+1}{c-1}$

বা, $\left(\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax-b}}\right)^2 = \left(\dfrac{c+1}{c-1}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{ax+b}{ax-b} = \dfrac{c^2+2c+1}{c^2-2c+1}$

বা, $\dfrac{ax+b+ax-b}{ax+b-ax+b} = \dfrac{c^2+2c+1+c^2-2c+1}{c^2+2c+1-c^2+2c-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2ax}{2b} = \dfrac{2c^2+2}{4c}$

বা, $\dfrac{ax}{b} = \dfrac{2(c^2+1)}{2\cdot 2c}$

বা, $\dfrac{ax}{b} = \dfrac{c^2+1}{2c}$

বা, $x = \dfrac{c^2+1}{2c} \times \dfrac{b}{a}$

বা, $x = \dfrac{b(c^2+1)}{2ac}$

বা, $x = \dfrac{b}{2a}\left(\dfrac{c^2+1}{c}\right)$

$\therefore x = \dfrac{b}{2a}\left(c+\dfrac{1}{c}\right)$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{b}{2a}\left(c+\dfrac{1}{c}\right)$

(vi) $81\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^3 = \dfrac{1+x}{1-x}$

বা, $81 = \dfrac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$ $\left[\dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^3}\right.$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে$\left.\right]$

বা, $\left\{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2\right\}^2 = (9)^2$

বা, $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2 = \pm 9$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]

বা, $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2 = 9$ অথবা, -9

বা, $\dfrac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{9}$ অথবা, $\pm\sqrt{-9}$

কিন্তু, $\frac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{-9}$ সমীকরণটির কোনো বাস্তব সংখ্যায় সমাধান নেই।

$\therefore \frac{1+x}{1-x} = \pm 3$

$\therefore$ হয় $\frac{1+x}{1-x} = 3$ অথবা, $\frac{1+x}{1-x} = -3$

বা, $1 + x = 3 - 3x$ বা, $-3 + 3x = 1 + x$

বা, $x + 3x = 3 - 1$ বা, $3x - x = 1 + 3$

বা, $4x = 2$ বা, $2x = 4$

বা, $x = \frac{2}{4}$ বা, $x = \frac{4}{2}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ $\therefore x = 2$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$ বা, $\frac{1}{2}$

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ (ii) $\frac{ac+bd}{ac-bd} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

সমাধান : (i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore \frac{a}{b} = k$ বা, $a = bk$

এবং $\frac{c}{d} = k$ বা, $c = dk$

বামপক্ষ $= \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{(bk)^2+bk.b+b^2}{(bk)^2-bk.b+b^2}$ [$\because a = bk$]

$= \frac{b^2k^2+b^2k+b^2}{b^2k^2-b^2k+b^2} = \frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)} = \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

ডানপক্ষ $= \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2} = \frac{(dk)^2+dk.d+d^2}{(dk)^2-dk.d+d^2}$ [$\because c = dk$]

$= \frac{d^2k^2+d^2k+d^2}{d^2k^2-d^2k+d^2} = \frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)} = \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore \frac{a}{b} = k$ এবং $\frac{c}{d} = k$

বা, $a = bk$ বা, $c = dk$

বামপক্ষ $= \frac{ac+bd}{ac-bd} = \frac{bk.dk+bd}{bk.dk-bd}$ [$\because a = bk$ এবং $c = dk$]

$= \frac{bdk^2+bd}{bdk^2-bd} = \frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}$

$= \frac{k^2+1}{k^2-1}$

ডানপক্ষ $= \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2} = \frac{(dk)^2+d^2}{(dk)^2-d^2}$ [$\because c = dk$]

$= \frac{d^2k^2+d^2}{d^2k^2-d^2} = \frac{d^2(k^2+1)}{d^2(k^2-1)}$

$= \frac{k^2+1}{k^2-1}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{ac+bd}{ac-bd} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$ (ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

সমাধান : (i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk,$

$b = ck = dk.k = dk^2$

এবং $a = bk = dk^2.k = dk^3$

বামপক্ষ $= \frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{(dk^3)^3+(dk^2)^3}{(dk^2)^3+(dk)^3}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{d^3k^9+d^3k^6}{d^3k^6+d^3k^3} = \frac{d^3k^6(k^3+1)}{d^3k^3(k^3+1)} = k^3$

ডানপক্ষ $= \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3} = \frac{(dk^2)^3+(dk)^3}{(dk)^3+d^3}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{d^3k^6+d^3k^3}{d^3k^3+d^3} = \frac{d^3k^3(k^3+1)}{d^3(k^3+1)} = k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk, b = ck = dk.\ k = dk^2$

এবং $a = bk = dk^2 .\ k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= \{(dk^3)^2+(dk^2)^2+(dk)^2\}\{(dk^2)^2+(dk)^2+d^2\}$

[a, b ও c এর মান বসিয়ে]

$= (d^2k^6+d^2k^4+d^2k^2)(d^2k^4+d^2k^2+d^2)$

$= d^2k^2(k^4+k^2+1) \times d^2(k^4+k^2+1)$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab+bc+cd)^2$

$= (dk^3 \cdot dk^2 + dk^2 \cdot dk + dk \cdot d)^2$ [মান বসিয়ে]

$= (d^2k^5+d^2k^3+d^2k)^2 = \{d^2k(k^4+k^2+1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2, a \neq b.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

$\therefore \frac{x}{2a} = \frac{4ab}{2a(a+b)}$ [উভয়পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$

আবার, $\frac{x}{2b} = \frac{4ab}{2b(a+b)}$

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{3b+a}{b-a}-\frac{3a+b}{b-a}$

$=\frac{3b+a-3a-b}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ **হলে,**

প্রমাণ কর যে, $x^3-3mx^2+3x-m=0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}+\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}-\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=\left(\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1}=\frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^3+6x}{6x^2+2}=\frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)}=m$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=m$

বা, $x^3+3x=3mx^2+m$ [আড়গুণন করে]

$\therefore x^3-3mx^2+3x-m=0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ **হলে,**

দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$

[যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1}=\frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$

[যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^2+2}{4x}=\frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{2(x^2+1)}{2\times 2x}=\frac{2a}{3b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2a}{3b}$

বা, $3bx^2+3b=4ax$ [আড়গুণন করে]

$\therefore 3bx^2-4ax+3b=0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ **হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

বা, $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ [একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2bc}{b^2+c^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{c}{b^2+c^2}=\frac{a}{a^2+b^2}$ [2b দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $ab^2+ac^2=a^2c+b^2c$ [আড়গুণন করে]

বা, $ab^2-b^2c=a^2c-ac^2$

বা, $b^2(a-c)=ac(a-c)$

বা, $b^2=ac$ [উভয়পক্ষকে $(a-c)$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

অর্থাৎ, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ **হলে,**

প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

সমাধান : মনে করি,

$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$

$\therefore x=k(b+c), y=k(c+a)$ এবং $z=k(a+b)$

১ম পক্ষ $=\frac{a}{y+z-x}$

$=\frac{a}{k(c+a)+k(a+b)-k(b+c)}$ [মান বসিয়ে]

$=\frac{a}{k(c+a+a+b-b-c)}=\frac{a}{k.2a}=\frac{1}{2k}$

২য় পক্ষ $=\frac{b}{z+x-y}$

$=\frac{b}{k(a+b)+k(b+c)-k(c+a)}$ [মান বসিয়ে]

$=\frac{b}{k(a+b+b+c-c-a)}=\frac{b}{k.2b}=\frac{1}{2k}$

৩য় পক্ষ $=\frac{c}{x+y-z}$

$= \frac{c}{k(b+c)+k(c+a)-k(a+b)}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{c}{k(b+c+c+a-a-b)}$

$= \frac{c}{k.2c} = \frac{1}{2k}$

$\therefore$ ১ম পক্ষ = ২য় পক্ষ = ৩য় পক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

সমাধান : মনে করি,

$\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = k$

$\therefore \frac{bz-cy}{a} = k$

বা, $bz-cy = ak$ .... (i)

আবার, $\frac{cx-az}{b} = k$

বা, $cx-az = bk$ .... (ii)

এবং $\frac{ay-bx}{c} = k$

বা, $ay-bx = ck$ ....(iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে x, y ও z দ্বারা গুণ করে যোগ করি,

$bxz-cxy+cxy-ayz+ayz-bxz$
$= akx+bky+ckz$

বা, $0 = k(ax+by+cz)$

$\therefore k = 0$

সমীকরণ (i)–এ $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$bz-cy = a.0$

বা, $bz-cy = 0$

বা, $bz = cy$

$\therefore \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ .... (iv)

সমীকরণ (ii)–এ $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$cx-az = b.0$

বা, $cx-az = 0$

বা, $cx = az$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ .... (v)

সমীকরণ (iv) ও (v) থেকে পাই,

$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$ অর্থাৎ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c \neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$.

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $\frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a}$

বা, $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$ [প্রত্যেক পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ [$\because a+b+c \neq 0$]

[প্রত্যেক পক্ষকে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$ হলে, $a = c$ এবং $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ হলে, $a = b$

অর্থাৎ, $a = b = c$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $= \frac{1}{a+b+c}$

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাতের মান = k

$\therefore \frac{x}{xa+yb+zc} = k$

বা, $k(xa+yb+zc) = x$ .... (i)

আবার, $\frac{y}{ya+zb+xc} = k$

বা, $k(ya+zb+xc) = y$ .... (ii)

এবং $\frac{z}{za+xb+yc} = k$

বা, $k(za+xb+yc) = z$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$k(xa+by+zc+ya+zb+xc+za+xb+yc) = x+y+z$

বা, $k(xa+ya+za+xb+yb+zb+xc+yc+zc) = x+y+z$

বা, $k\{a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)\} = x+y+z$

বা, $k(x+y+z)(a+b+c) = x+y+z$

বা, $k = \frac{(x+y+z)}{(x+y+z)(a+b+c)}$

$\therefore k = \frac{1}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a+b+c}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ যদি $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = \frac{1}{p}$.

সমাধান : মনে করি,

$(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r$
$= (a+b-c)s = k$

$\therefore (a+b+c)p = k$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{a+b+c}{k}$ … … … … … … (i)

আবার, $q(b+c-a) = k$

বা, $\frac{1}{q} = \frac{b+c-a}{k}$ … … … … … (ii)

অনুরূপভাবে, $(c+a-b)r = k$

বা, $\frac{1}{r} = \frac{c+a-b}{k}$ … … … … … (iii)

এবং $s(a+b-c) = k$

বা, $\frac{1}{s} = \frac{a+b-c}{k}$ ... ... (iv)

বামপক্ষ $= \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$

$= \frac{b+c-a}{k} + \frac{c+a-b}{k} + \frac{a+b-c}{k}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{k}$

$= \frac{a+b+c}{k} = \frac{1}{p}$ = ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $lx = my = nz$

∴ $lx = my$ ∴ $my = nz$ ∴ $lx = nz$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{m}{l}$ বা, $\frac{y}{z} = \frac{n}{m}$ বা, $\frac{x}{z} = \frac{n}{l}$

বা, $\frac{y}{x} = \frac{l}{m}$ বা, $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$ বা, $\frac{z}{x} = \frac{l}{n}$

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$= \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z} + \frac{y}{x}\cdot\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}$

$= \frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l} + \frac{l}{m}\cdot\frac{n}{m} + \frac{l}{n}\cdot\frac{m}{n}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ = ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ২১ ॥ যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

এখানে, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{(\sqrt{a+q})^2}{(\sqrt{a-q})^2}$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$ [∵ $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ দেওয়া আছে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q} = \frac{a}{q}$

বা, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ [একান্তরকরণ করে]

∴ $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ **(দেখানো হলো)**

অনুশীলনী ১১.২

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $a^2 = bc$ ● $b^2 = ac$ গ. $ab = bc$ গ. $a = b = c$

২. আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত 5 : 3; আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7 : 5 হবে?

ক. 5 বছর খ. 6 বছর ● 8 বছর ঘ. 10 বছর

ব্যাখ্যা : ধরি, আরিফের বয়স 5x এবং আকিবের বয়স 3x

প্রশ্নমতে, $5x = 20$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ আকিবের বয়স = (3×4) বছর = 12 বছর

আবার, ধরি, y বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7 : 5 হবে

$\therefore \frac{20 + y}{12 + y} = \frac{7}{5}$

বা, $100 + 5y = 84 + 7y$

বা, $7y - 5y = 100 - 84$

বা, $2y = 16$

$\therefore y = 8$

$\therefore$ 8 বছর পর বয়সের অনুপাত 7 : 5 হবে।

৩. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না।

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

iii. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, এদের প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h}$

উপরের তথ্যগুলোর ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii ● i ও iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : ii সঠিক নয়; কারণ, দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান হবে। যদি তাদের উচ্চতা সমান হয়। কিন্তু এখানে উচ্চতার কথা বলা হয় নি।

ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত 2 : 3 : 5 এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6; তথ্যের ভিত্তিতে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৪. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে তার ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে?

ক. ২ গুণ ● ৪ গুণ গ. ৮ গুণ ঘ. ৬ গুণ

ব্যাখ্যা : ধরি, বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x

$\therefore$ ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ একক

দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে বাহুর দৈর্ঘ্য = 2x

$\therefore$ ক্ষেত্রফল = $(2x)^2$ বর্গ একক = $4x^2$ বর্গ একক

৫. x : y = 7 : 5, y : z = 5 : 7 হলে, x : z = কত?

ক. 35 : 49 ● 35 : 35

গ. 25 : 49 ঘ. 49 : 25

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ একটি কাঠের পুল তৈরির প্রাক্কলিত ব্যয় 90,000 টাকা। কিন্তু খরচ বেশি হয়েছে 21,600 টাকা। খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে?

সমাধান : দেওয়া আছে, প্রাক্কলিত ব্যয় = 90,000 টাকা

খরচ বৃদ্ধি = 21600 টাকা

$\therefore$ শতকরা খরচ বৃদ্ধি = $\left(\frac{\text{প্রাক্কলিত ব্যয়}}{\text{খরচ বৃদ্ধি}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{90000}{21600} \times 100\right)\% = 24\%$

$\therefore$ খরচ 24% বৃদ্ধি পেয়েছে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ধানে চাল ও তুষের অনুপাত 7 : 3 হলে, এতে শতকরা কী পরিমাণ চাল আছে?

সমাধান : দেওয়া আছে, চাল : তুষ = 7 : 3

মনে করি, ধানে চালের পরিমাণ = 7x

এবং তুষের পরিমাণ = 3x

তাহলে, ধানের ওজন হবে $(7x + 3x)$ বা 10x

ধানে চালের শতকরা পরিমাণ = $\left(\frac{\text{চালের পরিমাণ}}{\text{ধানের পরিমাণ}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{7x}{10x} \times 100\right)\% = 70\%$

$\therefore$ ধানে 70% চাল আছে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

সমাধান :

1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন = 7 ডেসিগ্রাম

1 ঘন সে.মি. পানির ওজন = 1 গ্রাম = 10 ডেসিগ্রাম

এখন, $\frac{\text{১ ঘন সে.মি. কাঠের ওজন}}{\text{১ ঘন সে.মি. পনির ওজন}} = \frac{7}{10}$

∴ কাঠের ওজন এবং সমআয়তনের পানির ওজনের শতকরা

$$= \left(\frac{7}{10} \times 100\right) \% = 70\%$$

∴ কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের 70% **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ ক, খ, গ, ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 হয়।

সমাধান : এখানে,

ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3

খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 = (1 × 3) : (2 × 3) = 3 : 6

গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 = (3 × 2) : (2 × 2) = 6 : 4

∴ ক এর অংশ : খ এর অংশ : গ এর অংশ : ঘ এর অংশ

= 2 : 3 : 6 : 4

∴ অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 2 + 3 + 6 + 4 = 15

∴ ক এর অংশ = $\left(300 \text{ এর } \frac{2}{15}\right)$ টাকা = 40 টাকা

খ এর অংশ = $\left(300 \text{ এর } \frac{3}{15}\right)$ টাকা = 60 টাকা

গ এর অংশ = $\left(300 \text{ এর } \frac{6}{15}\right)$ টাকা = 120 টাকা

এবং ঘ এর অংশ = $\left(300 \text{ এর } \frac{4}{15}\right)$ টাকা = 80 টাকা

∴ ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা এবং ঘ 80 টাকা পায়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?

সমাধান : দেওয়া আছে, মোট মাছের সংখ্যা = 690 টি

তিনজনের অংশের অনুপাত = $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$

$$= \left(\frac{2}{3} \times 30\right) : \left(\frac{4}{5} \times 30\right) : \left(\frac{5}{6} \times 30\right)$$

[3, 5 ও 6 এর ল. সা. গু. 30 দিয়ে গুণ করে]

= 20 : 24 : 25

∴ অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 20 + 24 + 25 = 69

∴ ১ম জেলের মাছের সংখ্যা = $\left(690 \text{ এর } \frac{20}{69}\right)$ টি = 200 টি

২য় জেলের মাছের সংখ্যা = $\left(690 \text{ এর } \frac{24}{69}\right)$ টি = 240 টি

এবং ৩য় জেলের মাছের সংখ্যা = $\left(690 \text{ এর } \frac{25}{69}\right)$ টি = 250 টি

∴ তিনজন জেলে যথাক্রমে 200 টি, 240 টি এবং 250 টি মাছ পেল। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে. মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ত্রিভুজের পরিসীমা = 45 সে. মি.

এবং বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত = 3 : 5 : 7

∴ অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 3 + 5 + 7 = 15

∴ ত্রিভুজের প্রথম বাহুর দৈর্ঘ্য $\left(45 \text{ এর } \frac{3}{15}\right)$ সে. মি.

= 9 সে. মি.

ত্রিভুজের দ্বিতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য $\left(45 \text{ এর } \frac{5}{15}\right)$ সে. মি.

= 15 সে. মি.

এবং ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য $\left(45 \text{ এর } \frac{7}{15}\right)$ সে. মি.

= 21 সে. মি.

নির্ণেয় ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ 9 সে. মি., 15 সে. মি. ও 21 সে. মি.।

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ 1011 টাকাকে $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, মোট টাকার পরিমাণ 1011

এবং বন্টনের অনুপাত $= \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$

$$= \left(\frac{3}{4} \times 140\right) : \left(\frac{4}{5} \times 140\right) : \left(\frac{6}{7} \times 140\right)$$

[হর 4, 5 ও 7 এর ল.সা.গু. 140 দ্বারা গুণ করে]

= 105 : 112 : 120

∴ অনুপাতের রাশিগুলোর সমষ্টি = 105 + 112 + 120 = 337

∴ প্রথম অংশ = $\left(1011 \text{ এর } \frac{105}{337}\right)$ টাকা = 315 টাকা

দ্বিতীয় অংশ = $\left(1011 \text{ এর } \frac{112}{337}\right)$ টাকা = 336 টাকা

তৃতীয় অংশ = $\left(1011 \text{ এর } \frac{120}{337}\right)$ টাকা = 360 টাকা

∴ বিভক্তকৃত টাকার পরিমাণ 315 টাকা, 336 টাকা, 360 টাকা। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং তাদের গ. সা. গু. 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, সংখ্যা দুইটির অনুপাত 5 : 7

মনে করি, সংখ্যা দুইটি 5x ও 7x, যেখানে, x অনুপাতের সাধারণ গুণিতক।

5x ও 7x এর গ. সা. গু. x

প্রশ্নানুসারে, x = 4

5x ও 7x এর ল. সা. গু. = 35x = 35 × 4 [∵ x = 4]

= 140

অতএব, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. 140 **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান : সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান = 3 : 2

= (3 × 3) : (2 × 3)

= 9 : 6

মুশফিকুরের রান : মাশরাফীর রান = 3 : 2

= (3 × 2) : (2 × 2)

= 6 : 4

∴ সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান : মাশরাফীর রান = 9 : 6 : 4

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 9 + 6 + 4 = 19

∴ সাকিবের রান $\left(171 \text{ এর } \frac{9}{19}\right) = \left(171 \times \frac{9}{19}\right)$ রান = 81 রান

মুশফিকুরের রান $\left(171 \text{ এর } \frac{6}{19}\right) = \left(171 \times \frac{6}{19}\right)$ রান = 54 রান

মাশরাফীর রান $\left(171 \text{ এর } \frac{4}{19}\right) = \left(171 \times \frac{4}{19}\right)$ রান = 36 রান

$\therefore$ সাকিব 81 রান, মুশফিকুর 54 রান, মাশরাফী 36 রান করেছে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

সমাধান : মনে করি, একজন পিওন পায় x টাকা (সমানুপাতিক x ধরে)

তাহলে, একজন করণিক পায় $2x$ টাকা

এবং একজন কর্মকর্তা পায় $4x$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $(4x \times 2) + (2x \times 7) + (x \times 3) = 150000$

বা, $8x + 14x + 3x = 150000$

বা, $25x = 150000$

বা, $x = \frac{150000}{25}$

$\therefore x = 6000$

$\therefore$ একজন পিওনের বেতন = 6000 টাকা

একজন করণিকের বেতন = (6000×2) টাকা = 12000 টাকা

এবং একজন কর্মকর্তার বেতন = (6000×4) টাকা = 24000 টাকা

$\therefore$ প্রত্যেক কর্মকর্তা 24000 টাকা, করণিক 12000 টাকা এবং পিওন 6000 টাকা বেতন পায়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ একটি সমিতির নেতা নির্বাচনে দুইজন প্রতিদ্বন্দ্বীর মধ্যে ডোনাল্ড সাহেব 4 : 3 ভোটে জয়লাভ করলেন। যদি মোট সদস্য সংখ্যা 581 হয় এবং 91 জন সদস্য ভোট না দিয়ে থাকেন, তবে ডোনাল্ড সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী কত ভোটের ব্যবধানে পরাজিত হয়েছেন?

সমাধান : দেওয়া আছে, মোট সদস্য = 581 জন

91 জন সদস্য ভোট না দেওয়ায় ভোট দেওয়া সদস্য

$(581 - 91)$ জন = 490 জন

ডোনাল্ড সাহেবের প্রাপ্ত ভোট : প্রতিদ্বন্দ্বীর প্রাপ্ত ভোট = 4 : 3

অনুপাতের রাশিদ্বয়ের যোগফল = 4 + 3 = 7

$\therefore$ ডোনাল্ড সাহেব পেলেন $\left(490 \text{ এর } \frac{4}{7}\right)$ ভোট = 280 ভোট

এবং প্রতিদ্বন্দ্বী পেলেন $\left(490 \text{ এর } \frac{3}{7}\right)$ ভোট = 210 ভোট

$\therefore$ ডোনাল্ড সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী পরাজিত হলেন $(280 - 210)$ বা, 70 ভোটের ব্যবধানে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান : মনেকরি, বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক.

20% বৃদ্ধিতে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $\left(x + x \text{ এর } \frac{20}{100}\right)$ একক

$= \left(x + \frac{x}{5}\right)$ একক

$= \frac{6x}{5}$ একক

$\therefore$ 20% বৃদ্ধিতে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\left(\frac{6x}{5}\right)^2$ বর্গ একক

$= \frac{36x^2}{25}$ বর্গ একক

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $\left(\frac{36x^2}{25} - x^2\right)$ বর্গ একক

$= \left(\frac{36x^2 - 25x^2}{25}\right)$ বর্গ একক

$= \frac{11x^2}{25}$ বর্গ একক

$\therefore$ শতকরা ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $\left(\frac{\text{মোট বৃদ্ধি}}{\text{পূর্বের ক্ষেত্রফল}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{\frac{11x^2}{25}}{x^2} \times 100\right)\%$

$= 44\%$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় 44% **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x একক এবং প্রস্থ y একক

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গ একক

10% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = $\left(x + x \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ একক

$= \left(x + \frac{x}{10}\right)$ একক

$= \frac{11x}{10}$ একক

এবং 10% হ্রাসে আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = $\left(y - y \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ একক

$= \left(y - \frac{y}{10}\right)$ একক

$= \frac{9y}{10}$ একক

$\therefore$ 10% হ্রাস-বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10}$ বর্গ একক

$= \frac{99\,xy}{100}$ বর্গ একক

সুতরাং ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় $\left(xy - \frac{99xy}{100}\right)$ বর্গ একক

$= \left(\frac{100\,xy - 99xy}{100}\right)$ বর্গ একক

$= \frac{xy}{100}$ বর্গ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় = $\left(\frac{\text{মোট হ্রাস}}{\text{পূর্বের ক্ষেত্রফল}} \times 100\right)$ বর্গ একক

$= \left(\frac{\frac{xy}{100}}{xy} \times 100\right)$ বর্গ একক

$= \frac{xy}{100} \times \frac{1}{xy} \times 100$ বর্গ একক

$= 1$ বর্গ একক

অতএব, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1% হ্রাস পাবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7. ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে?

সমাধান : মনেকরি, সেচ পাওয়ার পরে ফলনের পরিমাণ x কুইন্টাল

সেচ আসার আগের ফলন : সেচ আসার পরের ফলন = 4 : 7

প্রশ্নানুসারে, $304 : x = 4 : 7$

বা, $\frac{304}{x} = \frac{4}{7}$

বা, $4x = 7 \times 304$

বা, $x = \frac{7 \times 304}{4}$

$\therefore x = 532$

$\therefore$ সেচ পাওয়ার পরে ফলন হবে 532 কুইন্টাল। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

সমাধান : মনে করি, উৎপন্ন চালের পরিমাণ x কুইন্টাল

এবং উৎপন্ন সুজির পরিমাণ y কুইন্টাল

প্রশ্নানুসারে, ধান : চাল = 3 : 2

বা, $1 : x = 3 : 2$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ চালের পরিমাণ $\frac{2}{3}$ কুইন্টাল

আবার, গম : সুজি = 4 : 3

বা, $1 : y = 4 : 3$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \frac{3}{4}$

$\therefore$ সুজির পরিমাণ $\frac{3}{4}$ কুইন্টাল।

উৎপন্ন চাল : উৎপন্ন সুজি = $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

$= \left(\frac{2}{3} \times 12\right) : \left(\frac{3}{4} \times 12\right)$

[3, 4 এর ল.সা.গু. 12]

$= 8 : 9$

$\therefore$ উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত 8 : 9। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২১ ॥ একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : দেওয়া আছে,

১ম জমির দৈর্ঘ্য : ২য় জমির দৈর্ঘ্য = 3 : 4

এবং ১ম জমির প্রস্থ : ২য় জমির প্রস্থ = 2 : 5

ধরি, ১ম জমির দৈর্ঘ্য = 3x মিটার

২য় জমির দৈর্ঘ্য = 4x মিটার

এবং ১ম জমির প্রস্থ = 2y মিটার

২য় জমির প্রস্থ = 5y মিটার

১ম জমির ক্ষেত্রফল = $(3x \times 2y)$ বর্গমিটার

= $6xy$ বর্গমিটার

২য় জমির ক্ষেত্রফল = $(4x \times 5y)$ বর্গমিটার

= $20xy$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $6xy = 432$

বা, $xy = \frac{432}{6}$

$\therefore xy = 72$

$\therefore$ ২য় জমির ক্ষেত্রফল = 20xy বর্গমিটার

= (20×72) ব.মি. [$\because xy = 72$]

= 1440 বর্গমিটার

$\therefore$ অপর জমির ক্ষেত্রফল 1440 বর্গমিটার। **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২২ ॥ জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% হার সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা–আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা–আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ব্যাংক থেকে জেমি ঋণ করে x টাকা এবং

সিমি ঋণ করে y টাকা

এখন, 10% মুনাফায় x টাকার 2 বছরের মুনাফা

$= \left(x \times 2 \times \frac{10}{100}\right)$ টাকা = $\frac{x}{5}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছর পরে জেমি মুনাফা–আসলে পরিশোধ করে = $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ টাকা

= $\frac{5x + x}{5}$ টাকা

= $\frac{6x}{5}$ টাকা

আবার, 10% মুনাফায় y টাকার 3 বছরের মুনাফা

$= \left(y \times 3 \times \frac{10}{100}\right)$ টাকা

= $\frac{3y}{10}$ টাকা

$\therefore$ 3 বছর পরে সিমি মুনাফা-আসলে পরিশোধ করে = $\left(y + \frac{3y}{10}\right)$ টাকা

= $\frac{10y + 3y}{10}$ টাকা

= $\frac{13y}{10}$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{6x}{5} = \frac{13y}{10}$

বা, $60x = 65y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{65}{60}$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{13}{12}$

$\therefore x : y = 13 : 12$

নির্ণেয় ঋণের অনুপাত 13 : 12

প্রশ্ন ॥ ২৩ ॥ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 30 সে. মি.

ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লিখ।

খ. বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীম 30 সে.মি.।

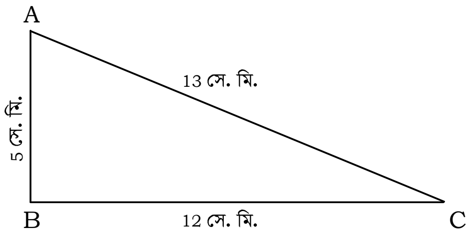
ধরি, ত্রিভুজের বাহুগুলো 5x, 12 x ও 13x সে.মি.

প্রশ্নমতে, $5x + 12x + 13x = 30$

বা, $30x = 30$

$\therefore x = 1$

অতএব, ত্রিভুজের বাহুগুলো হলো 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি.।

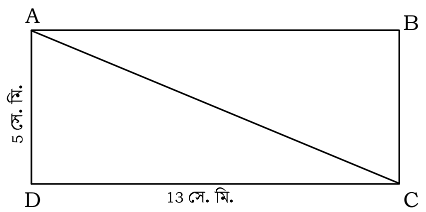


চিত্র হতে, $AB^2 + BC^2 = (5)^2 + (12)^2$

$= 25 + 144 = 169 = (13)^2 = (AC)^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ত্রিভুজটি সমকোণী। অতএব, ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ABC = 90°$

খ. বৃহত্তর বাহুর দৈর্ঘ্য 13 সে. মি. কে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. কে প্রস্থ ধরে নিচে আয়তক্ষেত্রটি আঁকা হলো :



ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ AC কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহু হলে ঐ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে AC^2 বর্গ সে. মি.

এখন, ΔADC এ $\angle D = 90°$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$= (5)^2 + (13)^2$

$= 25 + 169$

$= 194$

অর্থাৎ, ঐ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 194 বর্গ সে. মি. **(Ans.)**

গ. 10% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য

$= \left(13 + 13 \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ সে. মি.

$= \left(13 + \frac{13}{10}\right)$ সে. মি.

$= \frac{143}{10}$ সে. মি.

$= 14{\cdot}3$ সে. মি.

এবং 20% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ

$= \left(5 + 5 \text{ এর } \frac{20}{100}\right)$ সে. মি.

$= (5 + 1)$ সে. মি.

$= 6$ সে. মি.

$\therefore$ দৈর্ঘ্য–প্রস্থ বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

$= (14{\cdot}3 \times 6)$ বর্গ সে. মি.

$= 85{\cdot}8$ বর্গ সে. মি.

দৈর্ঘ্য 13 সে. মি. এবং প্রস্থ 5 সে. মি. বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = (13×5) বর্গ সে. মি. = 65 বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(85{\cdot}5 - 65)$ বর্গ সে.মি.

$= 20{\cdot}8$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $\left(\frac{\text{ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি}}{\text{আদি ক্ষেত্রফল}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{20{\cdot}8}{65} \times 100\right)\%$

$= 32\%$

অতএব, ক্ষেত্রফল 32% বৃদ্ধি পাবে।

প্রশ্ন ॥ ২৪ ॥ একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1 : 4।

ক. অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর।

খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1 : 9। মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

গ. মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রীসংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. মনে করি, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা x

এবং উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা 4x [এখানে, x ধনাত্মক আনুপাতিক ধ্রুবক]

মোট ছাত্র সংখ্যা = $x + 4x = 5x$

$\therefore$ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্রসংখ্যার $\frac{x}{5x}$ ভাগ

অর্থাৎ, $\frac{\text{অনুপস্থিত ছাত্র}}{\text{মোট ছাত্র}} \times 100\%$

$= \frac{x}{5x} \times 100\% = \frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$

$\therefore$ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার 20%

খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে,

উপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যা হয় $(4x + 10)$ জন

অনুপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যা $(x - 10)$ জন

প্রশ্নানুসারে, $(x - 10) : (4x + 10) = 1 : 9$

বা, $\frac{x - 10}{4x + 10} = \frac{1}{9}$

বা, $9x - 90 = 4x + 10$

বা, $9x - 4x = 90 + 10$

বা, $5x = 100$

বা, $x = \frac{100}{5}$

$\therefore x = 20$

$\therefore$ মোট শিক্ষার্থী $5x = (5 \times 20)$ জন = 100 জন **(Ans.)**

গ. ধরি, ছাত্রী সংখ্যা = y জন

এবং ছাত্র সংখ্যা = $(2y - 20)$ জন

প্রশ্নানুসারে, $y + 2y - 20 = 100$

বা, $3y = 100 + 20$

বা, $3y = 120$

বা, $y = \frac{120}{3}$

$\therefore y = 40$

∴ ছাত্রী সংখ্যা 40 জন।

∴ ছাত্র সংখ্যা = $2y - 20 = (2 \times 40 - 20)$ জন = 60 জন

∴ ছাত্র : ছাত্রী = 60 : 40 [20 দ্বারা ভাগ করে]

= 3 : 2

নির্ণেয় অনুপাত 3 : 2