ত্রয়োদশ অধ্যায়

সসীম ধারা

অনুশীলনী ১৩.১

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ 2 – 5 – 12 – 19 – ..... ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, 2 – 5 – 12 – 19 –.....

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 2$

$\therefore$ সাধারণ অন্তর, $d = -5 - 2 = -7$

$\therefore$ 12 তম পদ $= a + (12 - 1)\, d = 2 + 11 \times (-7)$

$= 2 - 77 = -75$

নির্ণেয় ধারাটির সাধারণ অন্তর -7 এর 12 তম পদ -75.

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ 8 + 11 + 14 + 17 + ... ধারাটির কোন পদ 392 ?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, 8 + 11 + 14 + 17 +.....

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 8$

সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 8 = 3$

মনে করি, n তম পদ $= 392$

n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore a + (n - 1)\, d = 392$

বা, $8 + (n - 1) \times 3 = 392$

বা, $(n - 1) \times 3 = 392 - 8$

বা, $n - 1 = \frac{384}{3}$

বা, $n = 128 + 1$

$\therefore n = 129$

$\therefore$ ধারাটির 129তম পদ 392.

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ 4 + 7 + 10 + 13 + ... ধারাটির কোন পদ 301 ?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, 4 + 7 + 10 + 13 + ...

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 4$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 4 = 3$

মনে করি, nতম পদ = 301

n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore a + (n - 1)d = 301$

বা, $4 + (n - 1) \times 3 = 301$

বা, $(n - 1) \times 3 = 301 - 4$

বা, $n - 1 = \frac{297}{3}$

বা, $n = 99 + 1$

$\therefore n = 100$

$\therefore$ ধারাটির 100তম পদ 301.

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ কোনো সমান্তর ধারার p তম পদ p^2 এবং qতম পদ q^2 হলে, ধারাটির (p + q) তম পদ কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ p তম পদ $= a + (p - 1)d$

q তম পদ $= a + (q - 1)d$

এবং (p + q) তম পদ $= a + (p + q - 1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (p - 1)d = p^2$ ..... (i)

$a + (q - 1)d = q^2$ .....(ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করি,

$(p - 1)d - (q - 1)d = p^2 - q^2$

বা, $d(p - 1 - q + 1) = (p + q)(p - q)$

বা, $d(p - q) = (p + q)(p - q)$

বা, $d = \frac{(p + q)(p - q)}{(p - q)}$

$\therefore d = p + q$

$\therefore (p + q)$ তম পদ $= a + (p + q - 1)d$

$= a + (p - 1)d + qd$

$= p^2 + q(p + q)$

$[\because a + (p - 1)d = p^2, d = p + q]$

$= p^2 + pq + q^2$

নির্ণেয় $(p + q)$ তম পদ $p^2 + pq + q^2$

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n ও n তম পদ m হলে, (m + n) তম পদ কত?

সমাধান : মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অন্তর = d

∴ ধারাটির mতম পদ = $a + (m - 1) d$

" n তম পদ = $a + (n - 1) d$

শর্তানুসারে, $a + (m - 1) d = n$ ..... (i)

এবং $a + (n - 1) d = m$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$(m - 1 - n + 1) d = n - m$

বা, $(m - n) d = - (m - n)$

বা, $d = \frac{-(m - n)}{(m - n)}$

∴ $d = - 1$

∴ ধারাটির $(m + n)$তম পদ $= a + (m + n - 1) d$

$= a + \{(m - 1) + n\} d$

$= a + (m - 1)d + nd$

$= n + n(- 1)$ [∵ $a + (m - 1) d = n$

এবং $d = - 1$]

$= n - n = 0$

নির্ণেয় $(m + n)$ তম পদ 0.

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ 1 + 3 + 5 + 7 + ... ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, 1 + 3 + 5 + 7 + ...

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, a = 1

সাধারণ অন্তর, d = 3 – 1= 2

এবং পদ সংখ্যা = n

∴ প্রদত্ত ধারার সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\}$

$= \frac{n}{2} \{2 \times 1 + (n - 1) \cdot 2\}$ [মান বসিয়ে]

$$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2)$$

$$= \frac{n}{2} \times 2n$$

$$= n^2$$

নির্ণেয় ধারাটির n পদের যোগফল n^2.

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ 8 + 16 + 24 + ... ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, 8 + 16 + 24 + ...

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ a = 8

এবং সাধারণ অন্তর d = 16 – 8 = 8

∴ ধারাটির 9টি পদের সমষ্টি, $S_9 = \frac{9}{2}\{2a + (9 - 1)\, d\}$

$$= \frac{9}{2}(2a + 8d)$$

$$= \frac{9}{2}(2 \times 8 + 8 \times 8)$$

$$= \frac{9}{2}(16 + 64)$$

$$= \frac{9}{2} \times 80$$

$$= 9 \times 40$$

$$= 360$$

∴ ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি 360.

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ 5 + 11 + 17 + 23 + ... + 59 = কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, 5 + 11+ 17 + 23 + ... + 59

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, a = 5

সাধারণ অন্তর, d = 11– 5 = 17 – 11 = 6

শেষ পদ, p = 59

ধরি, ধারাটির পদসংখ্যা = n

∴ n তম পদ = a + (n – 1)d

কিন্তু n তম পদ = শেষ পদ = 59

অর্থাৎ, 5 + (n – 1) 6 = 59

বা, $5 + 6n - 6 = 59$

বা, $6n - 1 = 59$

বা, $6n = 59 + 1$

বা, $n = \frac{60}{6} = 10$

$\therefore$ সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{10}{2}\{2 \times 5 + (10-1).6\}$ [এর মান বসিয়ে]

$= 5(10 + 9 \times 6)$

$= 5(10 + 54)$

$= 5 \times 64$

$= 320$

নির্ণেয় সমষ্টি 320.

প্রশ্ন ॥ ৯॥ 29 + 25 + 21 + ... – 23 = কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, $29 + 25 + 21 + ... - 23$

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a = 29$

সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$

শেষ পদ, $p = -23$

ধরি, ধারাটির পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ n তম পদ $= a + (n-1)d$

কিন্তু n তম পদ = শেষ পদ $= -23$

অর্থাৎ, $a + (n-1)d = -23$

বা, $29 + (n-1)(-4) = -23$

বা, $29 - 4n + 4 = -23$

বা, $4n = 33 + 23$

বা, $n = \frac{56}{4}$

$\therefore n = 14$

$\therefore$ সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{14}{2} \{2 \times 29 + (14 - 1)(-4)\}$ [মান বসিয়ে]

$= 7\{58 + 13(-4)\}$

$= 7(58 - 52) = 7 \times 6 = 42$

নির্ণেয় সমষ্টি 42.

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : ধরি,ধারাটির প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ 12 তম পদ $= a + (12 - 1)d$

$= a + 11d$

প্রশ্নমতে, $a + 11d = 77$ ... ... (i)

মনে করি, প্রথম 23 পদের সমষ্টি = S

$\therefore S = \frac{23}{2} \{2a + (23 - 1)d\}$ [$\because$ n = 23]

$= \frac{23}{2}(2a + 22d) = \frac{23}{2} \times 2(a + 11d)$

$= 23(a + 11d) = 23 \times 77 = 1771$

নির্ণেয় সমষ্টি 1771.

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ – 20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ ধারাটির 16 তম পদ, $a + (16 - 1)d = -20$

বা, $a + 15d = -20$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$

তাহলে, ধারাটির প্রথম 31টি পদের সমষ্টি

$S_{31} = \frac{31}{2} \{2a + (31 - 1)d\}$

$= \frac{31}{2}(2a + 30d) = \frac{31}{2} \times 2(a + 15d)$

$= \frac{31}{2} \times 2 \times (-20)$ [$\because$ a + 15d = –20]

$= 31 \times (-20) = -620$

নির্ণেয় সমষ্টি – 620.

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ 9 + 7 + 5 + ... ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল – 144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি হলো, 9 + 7 + 5 + ...

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

এখানে, প্রথম পদ, a = 9

সাধারণ অন্তর d = 7 – 9 = – 2

$\therefore S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = -144$

বা, $\frac{n}{2} \{(2 \times 9) + (n-1)(-2)\} = -144$

বা, $\frac{n}{2} (18 - 2n + 2) = -144$

বা, $\frac{n}{2} (20 - 2n) = -144$

বা, $\frac{n}{2} \times 2(10 - n) = -144$

বা, $n(10 - n) = -144$

বা, $10n - n^2 + 144 = 0$

বা, $n^2 - 10n - 144 = 0$

বা, $n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$

বা, $n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$

বা, $(n - 18)(n + 8) = 0$

হয় $n - 18 = 0$ অথবা, $n + 8 = 0$

$\therefore n = 18$ | $\therefore n = -8$

কিন্তু $n = -8$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কেননা পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 18$

নির্ণেয় পদসংখ্যা, $n = 18$.

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $2 + 4 + 6 + 8 + ...$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি $2 + 4 + 6 + 8 + ...$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = 4 - 2 = 2$

শর্তানুসারে, n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 2550$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$\therefore \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 2550$$

বা, $\frac{n}{2}\{2 \times 2 + (n-1)2\} = 2550$

বা, $\frac{n}{2}\{4 + (n-1)2\} = 2550$

বা, $\frac{n}{2}\{2n + 2\} = 2550$

বা, $\frac{n}{2} \times 2(n + 1) = 2550$

বা, $n(n + 1) = 2550$

বা, $n^2 + n - 2550 = 0$

বা, $n^2 + 51n - 50n - 2550 = 0$

বা, $n(n + 51) - 50(n + 51) = 0$

বা, $(n + 51)(n - 50) = 0$

হয় $n + 51 = 0$ অথবা, $n - 50 = 0$

$\therefore n = -51$ $\quad\quad$ $\therefore n = 50$

কিন্তু পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 50$

নির্ণেয় n এর মান 50.

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n + 1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, কোনো ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = n(n + 1)$

$n = 1, 2, 3, 4 \ldots \ldots \ldots \ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

S_1 = প্রথম পদের সমষ্টি $= 1(1 + 1) = 1 \times 2 = 2$

S_2 = প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি $= 2(2 + 1)$

$= 2 \times 3 = 6$

S_3 = প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি

$= 3(3 + 1) = 3 \times 4 = 12$

$\therefore$ প্রথম পদ $= 2$

দ্বিতীয় পদ $= S_2 - S_1 = 6 - 2 = 4$

এবং তৃতীয় পদ $= S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$

নির্ণেয় ধারাটি, $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots \ldots \ldots$

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n + 1)$ হলে, ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= n(n + 1)$.

$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

প্রথম পদের সমষ্টি $= 1(1 + 1) = 1 \times 2 = 2$

দুইটি পদের সমষ্টি $= 2(2 + 1) = 3 \times 2 = 6$

তিনটি পদের সমষ্টি $= 3(3 + 1) = 3 \times 4 = 12$

$\therefore$ প্রথম পদ $= 2$

দ্বিতীয় পদ $= 6 - 2 = 4$

এবং তৃতীয় পদ $= 12 - 6 = 6$

$\therefore$ ধারাটি $= 2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

তাহলে, 10 টি পদের সমষ্টি $S_{10} = \frac{10}{2}\{2a + (10 - 1)\,d\}$

$$= \frac{10}{2}\{2 \times 2 + (10 - 1)\,2\}$$

$$= 5(4 + 18)$$

$= 5 \times 22 = 110$

নির্ণেয় সমষ্টি 110.

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= a + (12 - 1)d$

$= a + 11d$

$\therefore$ ধারাটির 12 পদের সমষ্টি $S_{12} = \frac{12}{2}\{2a + (12 - 1)d\}$

বা, $144 = 6(2a + 11d)$

বা, $2a + 11d = \frac{144}{6}$

$\therefore 2a + 11d = 24$ .....(i)

আবার, 20 পদের সমষ্টি $S_{20} = \frac{20}{2}\{2a + (20 - 1)d\}$

বা, $560 = 10(2a + 19d)$

বা, $2a + 19d = \frac{560}{10}$

$\therefore 2a + 19d = 56$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$2a + 19d - 2a - 11d = 56 - 24$

বা, $8d = 32$

বা, $d = \frac{32}{8}$

$\therefore d = 4$

d এর মান সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই,

$2a + 19 \times 4 = 56$

বা, $2a + 76 = 56$

বা, $2a = 56 - 76$

বা, $a = \frac{-20}{2}$

$\therefore a = -10$

∴ প্রথম 6 পদের সমষ্টি $S_6 = \frac{6}{2}\{2a + (6 - 1)\,d\}$

$= \frac{6}{2}\{2 \times (-10) + (6 - 1) \times 4\}$

$= 3(-20 + 20)$

$= 3 \times 0 = 0$

নির্ণেয় সমষ্টি 0.

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম (m + n) পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ = a

এবং সমান্তর অন্তর = d

∴ ধারাটির প্রথম m পদের সমষ্টি = $\frac{m}{2}\{2a + (m - 1)\,d\}$

এবং ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

শর্তানুসারে, $\frac{m}{2}\{2a + (m - 1)d\} = n$ ..... (i)

এবং $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\} = m$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$2a + (m - 1)\,d = \frac{2n}{m}$ .....(iii)

সমীকরণ (ii) হতে পাই,

$2a + (n - 1)\,d = \frac{2m}{n}$ .....(iv)

সমীকরণ (iii) হতে (iv) বিয়োগ করে পাই,

$(m - n)d = \frac{2n}{m} - \frac{2m}{n}$

বা, $(m - n)d = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn}$

বা, $d = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn(m - n)}$

$$= \frac{2(n^2 - m^2)}{mn(m - n)}$$

$$= \frac{2(n + m)(n - m)}{mn(m - n)}$$

$$= \frac{-2(m + n)(m - n)}{mn(m - n)}$$

$$= \frac{-2(m + n)}{mn}$$

এখন, ধারাটির প্রথম $(m + n)$ পদের সমষ্টি

$$= \frac{m + n}{2}\{2a + (m + n - 1)d\}$$

$$= \frac{m + n}{2}\{2a + (m - 1)d + nd\}$$

$$= \frac{m + n}{2}\left\{\frac{2n}{m} - 2n\left(\frac{m + n}{mn}\right)\right\}$$ [iii নং ও d এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{m + n}{2}\left\{\frac{2n}{m} - \left(\frac{2(m + n)}{m}\right)\right\}$$

$$= \frac{m + n}{2}\left(\frac{2n - 2m - 2n}{m}\right)$$

$$= \frac{m + n}{2} \times \frac{-2m}{m}$$

$$= -(m + n)$$

নির্ণেয় সমষ্টি $-(m + n)$.

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ কোনো সমান্তর ধারায় p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$.

সমাধান : মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = x

এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ ধারাটির p তম পদ = $x + (p - 1)d$

" q তম পদ = $x + (q - 1)d$

" r তম পদ = $r + (q - 1)d$

শর্তানুসারে, $x + (p - 1)d = a$ ..... (i)

$x + (q - 1)d = b$ ..... (ii)

$$x + (r-1)\,d = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$(p - 1 - q + 1)\,d = a - b$$

বা, $(p - q)\,d = a - b$

$$\therefore\ d = \frac{a-b}{p-q}$$

d এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$$x + (p-1)\left(\frac{a-b}{p-q}\right) = a$$

বা, $x = a - \dfrac{(p-1)\,(a-b)}{p-q}$

$$\therefore\ x = \frac{a(p-q) - (p-1)\,(a-b)}{p-q}$$

সমীকরণ (iii)এ x ও d এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{a(p-q) - (p-1)(a-b)}{p-q} + (r-1)\left(\frac{a-b}{p-q}\right) = c$$

বা, $\dfrac{ap - aq - ap + bp + a - b + ar - br - a + b}{p-q} = c$

বা, $-aq + ar - br + bp = c(p-q)$

বা, $-a(q-r) - b(r-p) - c(p-q) = 0$

বা, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$

$\therefore\ a(q-r) + b(r-p) + c\,(p-q) = 0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ দেখাও যে, 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 125 = 169 + 171 + 173 + ... + 209

সমাধান : মনে করি, $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots + 125$

এবং $S_2 = 169 + 171 + 173 + \ldots\ldots + 209$

দেখাতে হবে যে, $S_1 = S_2$

এখানে, বামপক্ষের ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

ধরি, S_1 ধারার পদ সংখ্যা = n

কিন্তু n তম পদ = শেষ পদ = 125

$\therefore$ $a + (n - 1)d = 125$

বা, $1 + (n - 1)2 = 125$

বা, $1 + 2n - 2 = 125$

বা, $2n - 1 = 125$

বা, $2n = 125 + 1$

$\therefore$ $n = \frac{126}{2} = 63$

$\therefore$ $S_1 = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\, d\}$

$= \frac{63}{2}\{2 \times 1 + (63 - 1).2\}$ [n, a ও d এর মান বসিয়ে]

$= \frac{63}{2}(2 + 62 \times 2)$

$= \frac{63}{2} \times 2\,(1 + 62)$

$= 63 \times 63 = 3969$

আবার, ডানপক্ষের ধারার প্রথম পদ, $a = 169$

সাধারণ অন্তর, $d = 171 - 169 = 2$

ধরি, S_2 ধারার পদ সংখ্যা $= m$

কিন্তু m তম পদ = শেষ পদ $= 209$

$\therefore$ $a + (m - 1)\, d = 209$

বা, $169 + (m - 1)\, 2 = 209$

বা, $169 + 2m - 2 = 209$

বা, $2m + 167 = 209$

বা, $2m = 209 - 167$

$\therefore$ $m = \frac{42}{2} = 21$

$\therefore$ $S_2 = \frac{m}{2}\{2a + (m - 1)\, d\}$

$= \frac{21}{2}\{2 \times 169 + (21 - 1).2\}$ [m, a ও d এর মান বসিয়ে]

$= \frac{21}{2}(338 + 40) = \frac{21}{2} \times 378$

$= 21 \times 189 = 3969$

$\therefore S_1 = S_2$

অর্থাৎ, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots \ldots \ldots + 125 = 169 + 171 + 173 + \ldots \ldots \ldots + 209$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছু সংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

সমাধান : মনে করি, কিস্তির সংখ্যা = n

পরপর দুই কিস্তির পার্থক্য, $d = 2$; প্রথম কিস্তি, $a = 1$;

মোট ঋণের পরিমাণ, $S_n = 2500$

সমান্তর ধারার সূত্রমতে, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n-1)2\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2}\{2 + 2n - 2\}$

বা, $2500 = \frac{n}{2} \times 2n$

বা, $2500 = n^2$

বা, $n^2 = 2500$

বা, $n = \sqrt{2500}$

$\therefore n = \pm 50$

কিন্তু কিস্তির সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 50$

নির্ণেয় কিস্তির সংখ্যা 50টি।

অনুশীলনী ১৩.২

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $b = \frac{c+d}{2}$ খ. $a = \frac{b+c}{2}$ ● $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ. $d = \frac{a+c}{2}$

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ i. a + (a + d) + (a + 2d) .....ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

ii. $1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2n-1) = n^2$

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii ● i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

log 2 + log 4 + log 8 + ...

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক. 2 খ. 4 ● log 2 ঘ. 2log 2

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ ধারাটির 7ম পদ কত?

ক. log 32 খ. log 64 ● log 128 ঘ. log 256

ব্যাখ্যা : n তম পদ = a + (n – 1)d

যেহেতু, ১ম পদ, a = log 2

সাধারণ অন্তর, d = log 2

∴ 7 তম পদ = log 2 + (7 – 1) log 2 = log 2 + 6log 2 = 7log 2

= $\log 2^7$ = log 128.

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ 64 + 32 + 16 + 8 +..... ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি 64 + 32 + 16 + 8 + ...

এটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, a = 64

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

∴ n তম পদ = ar^{n-1}

∴ ধারাটির অষ্টম পদ = $64.\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$= 64 \times \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ 3 + 9 + 27 + ... ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি $3 + 9 + 27 + ...$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 3$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{3} = > 1$; পদ সংখ্যা $n = 14$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, যেখানে $r > 1$.

$\therefore$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি, $S_{14} = \frac{3\{(3)^{14} - 1\}}{3 - 1}$

$= \frac{3}{2}(3^{14} - 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ $128 + 64 + 32 + ...$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, $128 + 64 + 32 + ...$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 128$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার nতম পদ $= ar^{n-1}$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $\frac{1}{2}$

$\therefore ar^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2 \times 128}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ 5 তম পদ = $ar^{5-1} = ar^4$

এবং 10 তম পদ = $ar^{10-1} = ar^9$

প্রশ্নমতে,

$$ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

এবং $$ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করি,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{81}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

বা, $r^{9-4} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)5$

$\therefore$ $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

সমীকরণ (i) এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$$a.\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

বা, $a\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $a \times \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $a = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)2$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় তৃতীয় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}$, ... ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, ...$

ধারাটির যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত $= -\sqrt{2}$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 8\sqrt{2}$

প্রশ্নমতে, $ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8 \times 2$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

বা $n - 1 = 8$

$\therefore n = 9$

অতএব, প্রদত্ত ধারাটির 9ম পদ $8\sqrt{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ 5 + x + y + 135 গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, 5 + x + y + 135 ..... একটি গুণোত্তর ধারা

এখানে, প্রথম পদ, $a = 5$

ধরি, সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = 135$ [প্রশ্নানুসারে]

বা, $5.r^3 = 135$

বা, $r^3 = \frac{135}{5} = 27$

বা, $r^3 = (3)^3$

$\therefore r = 3$

দ্বিতীয় পদ, $ar^{2-1} = x$

বা, $ar = x$

বা, $5 \times 3 = x$ [$\because a = 5$ এবং $r = 3$]

$\therefore x = 15$

তৃতীয় পদ, $ar^{3-1} = y$

বা, $ar^2 = y$

বা, $5 \times 3^2 = y$ [$\because a = 5$ এবং $r = 3$]

বা, $5 \times 9 = y$

$\therefore y = 45$

নির্ণেয় x ও y এর মান যথাক্রমে 15 ও 45

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ 3 + x + y + z + 243 গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, 3 + x + y + z + 243 একটি গুণোত্তর ধারা

এখানে, প্রথম পদ $a = 3$

ধরি, সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ পঞ্চম পদ, $ar^{5-1} = 243$ [প্রশ্নানুসারে]

বা, $3.r^4 = 243$

বা, $r^4 = \frac{243}{3} = 81$

বা, $r^4 = (3)^4$

$\therefore r = 3$

দ্বিতীয় পদ, $ar^{2-1} = x$

বা, $3.r = x$ [$\because a = 3$]

বা, $3.3 = x$ [$\because r = 3$]

$\therefore x = 9$

তৃতীয় পদ, $ar^{3-1} = y$

বা, $3.3^2 = y$ [$\because a = 3, r = 3$]

বা, $27 = y$

$\therefore y = 27$

চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = z$

বা, $3.3^{4-1} = z$ [$\because a = 3, r = 3$]

বা, $3.3^3 = z$

বা, $3.27 = z$

$\therefore z = 81$

নির্ণেয় x, y ও z এর মান যথাক্রমে 9, 27 ও 81

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ 2 – 4 + 8 – 16 + ... ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি 2 – 4 + 8 – 16 + ...একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-4}{2} = -2 < 1$

পদ সংখ্যা, $n = 7$

গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ সাতটি পদের সমষ্টি, $S_7 = \frac{2\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}$; $r < 1$

$$= \frac{2(1+128)}{1+2} = \frac{2 \times 129}{3}$$

$$= 2 \times 43 = 86$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ 1 – 1 + 1 – 1 + ... ধারাটির (2n + 1) সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারা, 1 – 1 + 1 – 1 + ...

এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{1} = -1 < 1$

পদ সংখ্যা = $2n + 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r};\ r < 1$$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার ১ম $(2n + 1)$ পদের সমষ্টি $= a \times \frac{(1 - r^{2n+1})}{1 - r}$

$$= \frac{1\{1 - (-1)^{2n+1}\}}{1 - (-1)} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{1 - \{(-1)^{2n}.(-1)\}}{1 + 1} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

নির্ণেয় সমষ্টি 1.

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ log 2 + log 4 + log 8 + ... ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির সমষ্টি = S_{10}

$\therefore S_{10} = \log 2 + \log 4 + \log 8 + ...$ দশম পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + ...$ দশম পদ পর্যন্ত

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$S_{10} = \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + ... + \log 2^{10}$

$= \log 2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 + ... + 10 \log 2$

$= (1 + 2 + 3 + ... + 10) \log 2$

$= \frac{10(10 + 1)}{2} \log 2 \left[\because 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2} \right]$

$= \frac{10 \times 11}{2} \times \log 2 = 55 \log 2$

নির্ণেয় সমষ্টি $55 \log 2$.

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ log2 + log16 + log512 + ... ধারাটির প্রথম বারোটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ধারাটির সমষ্টি = S_{12}

$\therefore S_{12} = \log 2 + \log 16 + \log 512 + ...$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + ...$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + 4 \log 2 + 9 \log 2 + ...$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= (1 + 4 + 9 + ... + 12)\log 2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 12^2)\log 2$

$= \left\{\frac{12(12+1)(2.12+1)}{6}\right\}\log 2$

$\left[\because 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$= (2 \times 13 \times 25)\log 2 = 650\log 2$

নির্ণেয় সমষ্টি $650\log 2$

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ 2 + 4 + 8 + 16 + ... ধারাটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি, $2 + 4 + 8 + 16 + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{4}{2} = 2$

এবং n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = 254$

আমরা জানি, একটি গুণোত্তর ধারার n তম পদের সমষ্টি

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ [যখন $r > 1$]

প্রশ্নমতে,

$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 254$

বা, $2 \times \frac{(2^n - 1)}{2 - 1} = 254$ [মান বসিয়ে]

বা, $2^n - 1 = \frac{254}{2}$

বা, $2^n - 1 = 127$

বা, $2^n = 127 + 1 = 128$

বা, $2^n = 2^7$

$\therefore n = 7$

নির্ণেয় n এর মান 7

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ 2 – 2 + 2 – 2 + ... ধারাটির (2n + 2) সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি $2 - 2 + 2 - 2 + ...$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{2} = -1 < 1$ $[\because r < 1]$

এবং পদ সংখ্যা = $2n + 2$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{a(1 - r^{2n+2})}{1 - r} = \frac{2\{1 - (-1)^{2n+2}\}}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{2(1 - 1)}{1 + 1} = \frac{2 \times 0}{2} = 0$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n + 1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{\frac{n(n + 1)}{2}\right\}^2 = 441$

বা, $\left\{\frac{n(n + 1)}{2}\right\}^2 = (21)^2$

বা, $\frac{n(n + 1)}{2} = 21$ [বর্গমূল করে]

বা, $n(n + 1) = 42$

বা, $n^2 + n = 42$

বা, $n^2 + n - 42 = 0$

বা, $n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$

বা, $n(n + 7) - 6(n + 7) = 0$

বা, $(n + 7)(n - 6) = 0$

হয়, $n + 7 = 0$ অথবা, $n - 6 = 0$

$\therefore n = -7$ $\therefore n = 6$

কিন্তু পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 6$

$\therefore n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$

$$\therefore S_6 = \frac{6(6 + 1)}{2} \quad [\because n = 6]$$

$$= \frac{6 \times 7}{2} = 3 \times 7 = 21$$

$\therefore$ n এর মান 6 এবং সমষ্টি 21

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225$

বা, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = (15)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 15$ [বর্গমূল করে]

বা, $n(n+1) = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $n(n+6) - 5(n+6) = 0$

বা, $(n+6)(n-5) = 0$

হয়, $n + 6 = 0$ অথবা, $n - 5 = 0$

$\therefore n = -6$ $\therefore n = 5$

কিন্তু পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 5$

আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_5 = \frac{5(5+1)(2 \times 5 + 1)}{6} \quad [\because n = 5]$$

$$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$$

$$= 5 \times 11 = 55$$

সুতরাং n এর মান 5 এবং বর্গের সমষ্টি 55 **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ \ldots\ \ldots + 10^3$

$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots + 10)^2$

সমাধান :

বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ \ldots\ \ldots + 10^3$

যেহেতু $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ \ldots + n^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$

$\therefore\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 10^3 = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2$

$= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2$

$= (5 \times 11)^2$

$= (55)^2$

$= 3025$

ডানপক্ষ $= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 10)^2$

যেহেতু $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ \ldots\ \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

$\therefore\ 1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ \ldots\ \ldots + 10 = \frac{10\,(10+1)}{2}$

$= \frac{10 \times 11}{2}$

$= 5 \times 11$

$= 55$

$\therefore\ (1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdots + 10)^2 = (55)^2 = 3025$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ \ldots\ \ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + 4 +$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots + 10)^2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ২১ ॥ $\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3}{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n} = 210$ হলে, n এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3}{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n} = 210$$

বা, $\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 210$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \times \frac{2}{n(n+1)} = 210$

বা, $n(n+1) = 420$

বা, $n^2 + n - 420 = 0$

বা, $n^2 + 21n - 20n - 420 = 0$

বা, $n(n+21) - 20(n+21) = 0$

বা, $(n+21)(n-20) = 0$

হয়, $n + 21 = 0$ অথবা, $n - 20 = 0$

$\therefore n = -21$ $\quad\quad$ $\therefore n = 20$

কিন্তু, $n = -21$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n = 20$

নির্ণেয় n এর মান 20.

প্রশ্ন ॥ ২২ ॥ 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহদণ্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রথম টুকরার দৈর্ঘ্য = a মিলিমিটার

সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য = $ar^{10-1} = ar^9$

শর্তমতে, $ar^9 = 10a$

বা, $r^9 = 10$

বা, $r = 10^{\frac{1}{9}}$

$\therefore r = 1.29$

অর্থাৎ, $r > 1$

$\therefore$ ধারার সমষ্টি, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

বা, $1000 = \frac{a\{(1.29)^{10} - 1\}}{1.29 - 1}$ $\quad\quad$ [$\because$ 1 মি. = 1000 মি.মি.]

বা, $1000 = \frac{a\{(1.29)^{10} - 1\}}{0.29}$

বা, $a\{(1.29)^{10} - 1\} = 290$

বা, $a(12.76 - 1) = 290$

বা, $a \times 11.76 = 290$

বা, $a = \frac{290}{11.76} = 24.66$

$\therefore$ a = 24.66 মিলিমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য 24.66 মিলিমিটার (প্রায়)।

প্রশ্ন ॥ ২৩ ॥ একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ – 2 এবং ৯ম পদ $8\sqrt{2}$

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ = a

সাধারণ অনুপাত = r

আমরা জানি, ধারাটির n তম পদ = ar^{n-1}

প্রশ্নানুসারে, চতুর্থ পদ, $a^{4-1} = -2$ বা, $ar^3 = -2$..... (i)

৯ম পদ, $ar^{9-1} = 8\sqrt{2}$, বা, $ar^8 = 8\sqrt{2}$, ... (ii)

খ. সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$

বা, $r^{8-3} = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = -\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}$

বা, $r^5 = (-\sqrt{2})^5$

$\therefore r = -\sqrt{2}$

r এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$a(-\sqrt{2})^3 = -2$

বা, $-2\sqrt{2}a = -2$

বা, $a = \frac{-2}{-2\sqrt{2}}$

$\therefore\ a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2})^{11}$

$= \frac{-32\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -32$ **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, ১ম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{2}$

নির্ণেয় ধারাটি $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^2 + ...$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} .....$

প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি, $S = \frac{a(1-r^7)}{1-r}$ [$\because\ r = -1 < 1$]

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^7\}}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$

$= \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$= \frac{\sqrt{2}+8.2-1-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{15-7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{15\sqrt{2}-14}{2} = \frac{1}{2}(15\sqrt{2}-14)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২৪ ॥ কোন ধারার n তম পদ 2n – 4

ক. ধারাটি নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 10তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে পথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, কোনো ধারার n তম পদ = $2n - 4$

$n = 1, 2, 3, 4,$ ..... বসিয়ে পাই,

এখন, $n = 1$ হলে, ১ম পদ = $2.1 - 4 = -2$

$n = 2$ হলে, ২য় পদ = $2.2 - 4 = 0$

$n = 3$ হলে, ৩য় পদ = $2.3 - 4 = 2$

$n = 4$ হলে, ৪র্থ পদ = $2.4 - 4 = 4$

... ...

... ...

নির্ণেয় ধারাটি $-2 + 0 + 2 + 4 +$ ..... $+ (2n - 4)$

খ. এখানে, ধারাটির ১ম পদ = -2

সাধারণ অন্তর = $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$

$\therefore$ 10ম পদ = $-2 + (10 - 1)2 = -2 + 9 \times 2 = -2 + 18 = 16$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি, $S_{20} = \frac{20}{2}\{2(-2) + (20 - 1)2\}$

$= 10(-4 + 38)$

$= 10 \times 34$

$= 340$ **(Ans.)**

গ. ধরি, ধারাটির, ১ম পদ, $a = -2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

তাহলে ধারাটি হবে একটি গুণোত্তর ধারা যার

n তম পদ = ar^{n-1}

$\therefore$ ২য় পদ $= (-2)2^{2-1}$

$= (-2) \times 2$

$= -4$

৩য় পদ = $(-2)\,2^{3-1}$

$= (-2) \times 2^2$

$= -8$

৪র্থ পদ = $(-2)2^{4-1}$

$= (-2) \times 2^3$

$= -16$

নির্ণেয় নতুন ধারাটি = $-2-4-8-16-\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 8 পদের সমষ্টি $S_8 = \dfrac{-2(2^8-1)}{2-1}$

[$\because r = 2 > 1$]

$$= \frac{-2(256-1)}{1}$$

$$= -2 \times 255$$

$$= -510$$

সুতরাং ধারাটি, $-2-4-8-16-\ldots\ldots$ এবং সমষ্টি -510