পঞ্চদশ অধ্যায়
ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক. 3cm, 4cm, 5cm খ. 6 cm, 8cm, 10 cm

● 5 cm, 7 cm, 9 cm ঘ. 5cm, 12 cm, 13 cm

ব্যাখ্যা : $5^2 + 7^2 \neq 9^2$

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

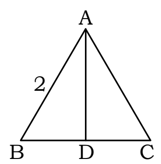
নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii ● i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : (ii) সঠিক নয়। কারণ– দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান হলে সর্বসম নাও হতে পারে।

নিচের চিত্রে, ΔABC সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$

তথ্যের ভিত্তিতে (৩ ও ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ BD = কত?

● 1 খ. $\sqrt{2}$ গ. 2 ঘ. 4

ব্যাখ্যা : $AB = BC = AC = 2$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ একক ● $\sqrt{3}$ একক

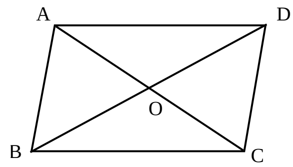
গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ একক ঘ. $2\sqrt{3}$ একক

ব্যাখ্যা : ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2}$

$$= \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে চারটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD

প্রমাণ :

ধাপসমুহ	**যথার্থতা**
(১) ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\therefore$ OB = OD এবং OA = OC	[সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) ΔBDC এ OC, BD এর উপর মধ্যমা। $\therefore$ Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র BOC ....(i)	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]
(৩) ΔABC এ OB, AC এর উপর মধ্যমা হওয়ায় Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র AOB ....(ii)	[একই]
(৪) AO, BD এর	[একই]

উপর ΔABD এর মধ্যমা হলে,

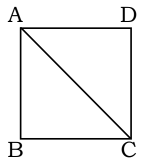
Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র AOD ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে পাই,

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং AC এর কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC$ = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ বলে।

(২) আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি সমান।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ [$\because AB = BC = CD = AD$]

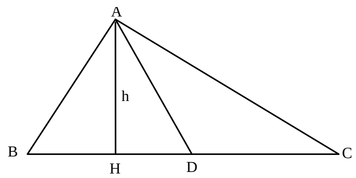
বা, $AC^2 = 2AB^2$

বা, $2AB^2 = AC^2$

$\therefore AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AD, BC এর উপর মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD।

অঙ্কন : A হতে BC এর উপর AH লম্ব টানি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) D, BC এর মধ্যবিন্দু।

BD = CD [AD, BC–এর উপর মধ্যমা]

(২) Δ ক্ষেত্র ABD = $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা[AH = h উচ্চতা]

$= \frac{1}{2} \times BD \times AH$

$= \frac{1}{2} \times BD \times h$

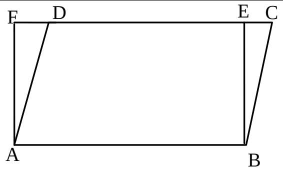
(৩) Δ ক্ষেত্র ACD = $\frac{1}{2} \times CD \times h$[ধাপ (২) অনুসারে]

$= \frac{1}{2} \times BD \times h[\because BD = CD]$

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা $>$ ABEF আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) ABCD সামান্তরিকক্ষেত্র ও ABEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল AB ও CF এর মধ্যে অবস্থিত। আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।	[সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল]
(২) BCE সমকোণী ত্রিভুজ। BC, BCE সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হওয়ায় BC $>$ BE	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু]

(৩) এখন, ABEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা

$= 2\ (AB + BE)$

$= 2\ AB + 2\ BE$

(৪) ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা

$= 2\ (AB + BC)$

$= 2\ AB + 2\ BC$

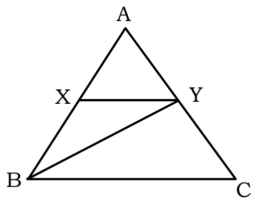
(৫) যেহেতু $BC > BE$

$\therefore\ 2\ AB + 2\ BC > 2\ AB + 2\ BE$

অর্থাৎ, ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা $>$ ABEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y । X ও Y যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।

অঙ্কন : B, Y যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔABY-এ XY, AB−এর ওপর মধ্যমা।[দেওয়া আছে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AXY−এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABY−এর ক্ষেত্রফল) [XY মধ্যমা, Δ ক্ষেত্র ABY কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

(২) ΔABC এ BY, AC−এর ওপর মধ্যমা।

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABY এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল) [একই]

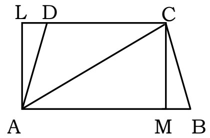
(৩) Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\right.$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)$\left.\right\}$[১নং ও ২নং হতে]

$= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে বর্ধিত CD এর উপর AL এবং C থেকে AB এর উপর CM লম্ব টানি। A ও C যোগ করি।

ক্ষেত্রফল নির্ণয় : ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র ABCD, AC দ্বারা Δ ক্ষেত্র ABC ও Δ ক্ষেত্র ACD এ বিভক্ত হয়েছে। CM লম্ব হওয়ায় Δ ক্ষেত্র ABC এর ভূমি AB এবং CM উচ্চতা।

Δ ক্ষেত্র ACD এর ভূমি CD এবং উচ্চতা AL, একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হওয়ায়, CM = AL।

এখন, Δ ক্ষেত্র ABC $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times AB \times CM$

Δ ক্ষেত্র ACD $= \frac{1}{2} \times CD \times AL = \frac{1}{2} \times CD \times CM$

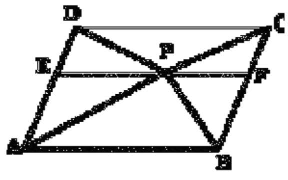
$[\because AL = CM]$

সুতরাং, ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD = (Δ ক্ষেত্র ABC) + (Δ ক্ষেত্র ACD) $= \frac{1}{2} AB \times CM + \frac{1}{2} CD \times CM$

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB + CD) \times CM$

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ সামান্তরিক ABCD এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সামান্তরিক ABCD এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। P ও A, P ও B, P ও C এবং P ও D যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে,

Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)

অঙ্কন : P বিন্দু দিয়ে AB অথবা CD এর সমান্তরাল EF টানি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র ABFE এর ক্ষেত্রফল .... (i)

[Δ ক্ষেত্র PAB ও সামান্তরিকক্ষেত্র ABFE একই ভূমি AB এবং AB ও EF সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।]

(২) Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF এর ক্ষেত্রফল .... (ii)

[Δ ক্ষেত্র PCD ও সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF একই ভূমি CD এবং CD ও EF সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।]

(৩) Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABFE এর ক্ষেত্রফল + সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF এর ক্ষেত্রফল) =

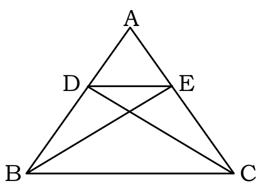
$\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE

অঙ্কন : B, E; C, D এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ :

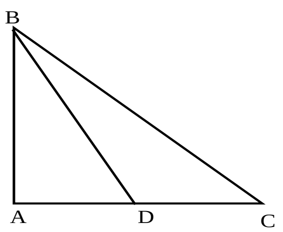
ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) Δ ক্ষেত্র DBC ও Δ ক্ষেত্র EBC একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত। $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC	[উপপাদ্য–১৫.১]
(২) আবার, Δ ক্ষেত্র BDE ও Δ ক্ষেত্র CDE একই ভূমি DE এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE	[উপপাদ্য–১৫.১]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDC = Δ ক্ষেত্র EBC

সুতরাং, Δ ক্ষেত্র BDE = Δ ক্ষেত্র CDE (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ABC ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। B, D যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) ABC সমকোণী ত্রিভুজে BC অতিভুজ এবং	

$\angle A$ = এক সমকোণ।

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$.............(i)[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে BD অতিভুজ

$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$ [একই]

বা, $AB^2 = BD^2 - AD^2$

(৩) এখন, সমীকরণ (i)–এ

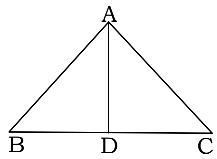
$AB^2 = BD^2 - AD^2$ বসিয়ে পাই,

$BC^2 = BD^2 - AD^2 + AC^2$

$\therefore BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC–এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $4AD^2 = 3AB^2$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB = BC = CA এবং AD, BC–এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{AB}{2}$	[সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

(২) এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AD^2 + BD^2 = AB^2$[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $AD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2$ [$\because BD = \frac{AB}{2}$ বসিয়ে]

বা, $AD^2 + \frac{AB^2}{4} = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4}$

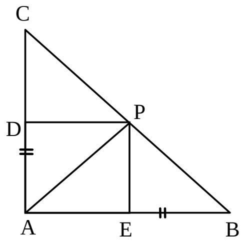
বা, $AD^2 = \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$

বা, $AD^2 = \frac{3AB^2}{4}$

$\therefore$ $4AD^2 = 3AB^2$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। এর $\angle A = 90°$, AB = AC এবং BC অতিভুজ।

P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু। P, A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

অঙ্কন : P হতে AB এর উপর PE এবং AC এর উপর PD লম্ব টানি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) ΔABC এর $\angle A = 90°$ এবং AB = AC হওয়ায় $\angle B = \angle C = 45°$ হবে।	[দেওয়া আছে] [$\because$ PD $\perp$ AC]
(২) এখন, ΔPDC এর $\angle D = 90°$। সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$ $\therefore$ PD = CD	[একই] [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৩) PBE সমকোণী ত্রিভুজে, PE = BE PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায়, $PC^2 = PD^2 + CD^2 = PD^2 + PD^2 = 2PD^2$	[$\because$ PD = CD] [পিথাগোরাসের উপপাদ্য] [$\because$ BE = PE]
(৪) আবার, PBE সমকোণী	

ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,

$PB^2 = BE^2 + PE^2$

$= PE^2 + PE^2$

$= 2PE^2$

$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PD^2 + 2PE^2 = 2(PD^2 + PE^2)$

(৫) এখন, $\angle E = \angle A = \angle D$ = এক সমকোণ হওয়ায় ADPE একটি আয়ত।

$\therefore PE = AD$

$\therefore PB^2 + PC^2 = 2(PD^2 + AD^2)$

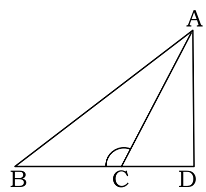
(৬) ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

$PA^2 = AD^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

অতএব, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ; AD, BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔADB এ, AD লম্ব হওয়ায় $\angle D$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ। [দেওয়া আছে]

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.\ CD$

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$...........(i)

(২) আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ।

$\therefore\ AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

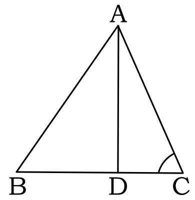
(৩) এখন, সমীকরণ (i) এ

$AD^2 + CD^2 = AC^2$ বসিয়ে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) যেহেতু $AD \perp BC$, তাই ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং AB অতিভুজ। [দেওয়া আছে]

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= AD^2 + (BC - CD)^2$ [$\because BD = BC - CD$]

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.\ CD$.......(i)

(২) আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ।

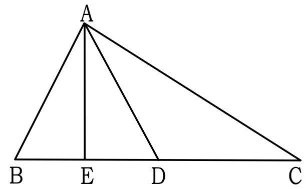
$\therefore\ AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(৩) এখন সমীকরণ (i) এ, $AD^2 + CD^2 = AC^2$ বসিয়ে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। অর্থাৎ AD, BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন : BC এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AE, BC এর উপর লম্ব, সুতরাং AEB এবং AEC দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। এখন, AEB সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ।	

$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= AE^2 + (BD - DE)^2$ [$\because BE = BD - DE$]

$= AE^2 + BD^2 + DE^2 - 2BD.DE$........ (i)

(২) ADE সমকোণী ত্রিভুজে AD অতিভুজ।

$\therefore AD^2 = AE^2 + DE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

সমীকরণ (i) এ $AE^2 + DE^2 = AD^2$ বসিয়ে পাই,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.DE$ ....(ii)

(৩) আবার, AEC সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ।

$\therefore AC^2 = AE^2 + CE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= AE^2 + (CD + DE)^2$ [$\because CE = CD + DE$]

$= AE^2 + (BD + DE)^2$ [$\because BD = CD$]

$= AE^2 + BD^2 + DE^2 + 2BD.DE$

$= AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$...... (iii) [$\because AE^2 + DE^2 = AD^2$]

(৪) সমীকরণ (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.DE + AD^2 + BD^2 + 2BD.DE = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (দেখানো হলো)