অষ্টম অধ্যায়

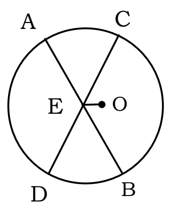
বৃত্ত

অনুশীলনী ৮.১

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ACBD বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পরকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E-ই বৃত্তের কেন্দ্র।

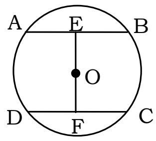
অঙ্কন : বৃত্তটির কেন্দ্র E না ধরে O ধরি এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু E·	[জানা আছে যে, বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব]
$\therefore$ OE $\perp$ AB অর্থাৎ $\angle$OEA = এক সমকোণ	
(২) আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা এর মধ্যবিন্দু E·	
$\therefore$ OE $\perp$ CD অর্থাৎ $\angle$OEC = এক সমকোণ	
(৩) যেহেতু AB এবং CD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা।	
$\therefore$ $\angle$OEA এবং $\angle$OEC উভয়ই এক সমকোণ হতে পারে না।	
(৪) সুতরাং E ব্যতীত অন্য কোনো বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হতে পারে না।	
$\therefore$ E বিন্দুটি ACBD বৃত্তের কেন্দ্র। **[প্রমাণিত]**	

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যায়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।



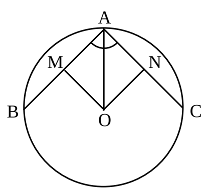
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O। AB এর মধ্যবিন্দু E এবং CD এর মধ্যবিন্দু F এবং AB||CD। প্রমাণ করতে হবে যে, EF কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) F, CD এর মধ্যবিন্দু এবং OF কেন্দ্র ও জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ।	
$\therefore$ OF, CD এর ওপর লম্ব।	[বৃত্তের কেন্দ্র ও জ্যায়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যায়ের ওপর লম্ব]
এবং $\angle$OFC = এক সমকোণ।	
(২) আবার, E, AB এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় OE, AB এর ওপর লম্ব এবং $\angle$AEO = এক সমকোণ।	[একই কারণে]
$\therefore$ $\angle$AEO = $\angle$OFC	[একান্তর কোণ]
(৩) AB $\parallel$ CD হওয়ায় EF ছেদক।	
অর্থাৎ E, O, F একই সরলরেখা।	
অতএব, EF কেন্দ্রগামী এবং EF$\perp$CD এবং FE$\perp$AB· **[প্রমাণিত]**	

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC·

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও AC জ্যা দুইটি OA ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle$BAO = $\angle$CAO।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC·

অঙ্কন : O হতে AB এর ওপর OM এবং AC এর ওপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) OM,AB এর ওপর লম্ব হওয়ায়, OM, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অথাৎ, $AM = \frac{1}{2}\ AB$

(২) আবার, ON, AC এর ওপর লম্ব হওয়ায়, $AN = \frac{1}{2}\ AC$

(৩) এখন, ΔAOM ও ΔAON এর মধ্যে

$\angle AMO = \angle ANO$ [সমকোণ বলে]

$\angle MAO = \angle NAO$ [কল্পনা]

এবং AO সাধারণ বাহু।

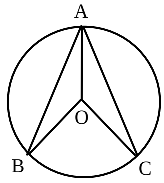
$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

অতএব, $AM = AN$

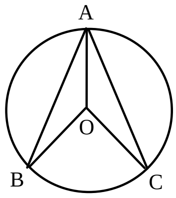
অর্থাৎ $\frac{1}{2}\ AB = \frac{1}{2}\ AC$

$\therefore AB = AC$ **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC। প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$.



সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC। AO কেন্দ্রগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAO = \angle CAO$.

অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔAOB ও ΔAOC এর মধ্যে

$AB = AC$ [দেওয়া আছে]

$BO = CO$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

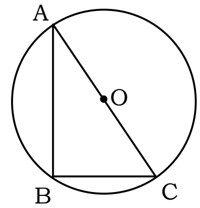
এবং AO বাহু সাধারণ। [বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব, $\angle BAO = \angle CAO$। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাতে হবে যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী ΔABC এর $\angle B$ = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ।

A, B, C শীর্ষবিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা হলো। মনে করি, বৃত্তটির কেন্দ্র O। দেখাতে হবে যে, কেন্দ্র O অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এর

$\angle ABC$ = এক সমকোণ [কল্পনা]

$\therefore$ $\angle ABC$, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]

(২) A, B, C বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস AC।

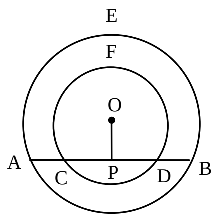
সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাস AC এর উপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র O, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। **[দেখানো হলো]**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABE ও CDF বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র O। ABE বৃত্তের জ্যা AB, CDF বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD।

অঙ্কন : O হতে AB বা CD এর ওপর OP লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) OP, CD এর ওপর লম্ব হওয়ায় OP, CD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ $CP = PD$ [বৃত্তের কেন্দ্র হতে কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

(২) আবার, OP, AB এর ওপর লম্ব হওয়ায়, OP, AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ, $AP = BP$ [একই]

এখন, $AP = AC + CP$

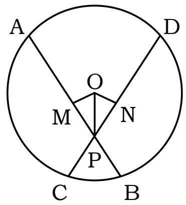
এবং $BP = PD + BD$

সুতরাং $AC + CP = PD + BD$ [$\because AP = BP$]

$\therefore AC = BD$ **[প্রমাণিত]** [$\because CP = PD$]

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাতে হবে যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ACBD বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও CD দুটি সমান জ্যা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AP = PD এবং PB = PC·

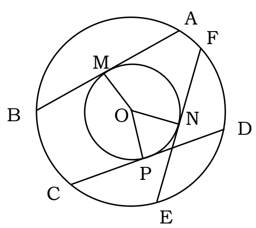
অঙ্কন : O হতে AB এর ওপর OM এবং CD এর ওপর ON লম্ব আঁকি। O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) MOP ও NOP সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে	
OM = ON	[সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]
এবং OP সাধারণ অতিভুজ।	
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।	
∴ PM = PN .... (i)	
(২) এখন, OM, AB এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$AM = \frac{1}{2}$ AB	[বৃত্তের কেন্দ্র হতে কোনো জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(৩) ON, CD এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$DN = \frac{1}{2}$ CD	[একই]
যেহেতু, AB = CD	
∴ AM = DN .... (ii)	
(৪) সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,	
PM + AM = PN + DN	
বা, AP = PD	
(৫) আবার, AB = CD	
বা, AB – AP = CD – PD	
বা, PB = PC	
অতএব, AP = PD এবং PB = PC· **[দেখানো হলো]**	

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCEDF বৃত্তে O কেন্দ্র। AB, CD এবং EF তিনটি পরস্পর সমান সমান জ্যা। M, N এবং P সমান জ্যা'গুলোর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং P সমবৃত্ত।

অঙ্কন : O ও M, O ও N এবং O ও P যোগ করি।

প্রমাণ :

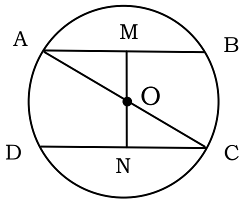
ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) যেহেতু M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং OM কেন্দ্রগামী রেখাংশ।	
∴ OM, AB এর উপর লম্ব।	[বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব]
(২) OP, CD এর ওপর লম্ব।	[একই কারণ]
(৩) ON, EF এর উপর লম্ব।	[একই কারণ]
(৪) OM = OP = ON	[বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OM অথবা ON অথবা OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে M, N ও P বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, M, N ও P সমবৃত্ত। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AC ব্যাস। AB ও CD দুইটি সমান সমান জ্যা AC ব্যাসের বিপরীত দিকে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB || CD

অঙ্কন : O হতে AB এর ওপর OM এবং CD এর ওপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) OM, AB এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$AM = \frac{1}{2}$ AB	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) ON, CD এর ওপর লম্ব হওয়ায়, $CN = \frac{1}{2}$ CD	[একই]
(৩) যেহেতু, AB = CD	
∴ AM = CN	
(৪) ΔAOM ও ΔCON	
এর মধ্যে AM = CN	
AO = OC	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এবং OM=ON	[সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী বলে]
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।	

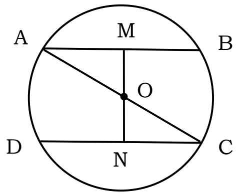
$\therefore \angle A = \angle C$

কিন্তু কোণ দুইটি AC রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত।

সুতরাং কোণ দুইটি একান্তর হওয়ায় AB || CD· **[দেখানো হলো]**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AC ব্যাস। AC ব্যাসের বিপরীত পাশে AB||CD দুইটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = CD·

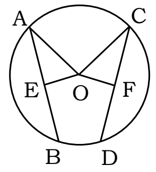
অঙ্কন : O হতে AB এর ওপর OM এবং CD এর ওপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) OM, AB জ্যা এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$AM = \frac{1}{2}$ AB	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) ON, CD জ্যা এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$CN = \frac{1}{2}$ CD·	[একই]
(৩) ΔAOM ও ΔCON এর মধ্যে	
$\angle AMO = \angle CNO$	[সমকোণ বলে]
$\angle MAO = \angle NCO$	[একান্তর কোণ বলে]
এবং AO = CO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।	
$\therefore$ AM = CN	
(৪) অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ CD	
অতএব, AB = CD **[দেখানো হলো]**	

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABDC বৃত্তের O কেন্দ্র। AB ও CD দুইটি জ্যা-এর মধ্যে AB > CD। OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB ও CD এর ওপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, OE < OF·

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

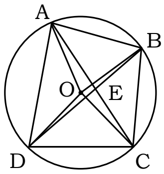
ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) OE, AB এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$AE = \frac{1}{2}$ AB	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এবং OF, CD এর ওপর লম্ব হওয়ায়,	
$CF = \frac{1}{2}$ CD	[একই]
(৩) AOE সমকোণী ত্রিভুজে AO অতিভুজ	
$\therefore OA^2 = OE^2 + AE^2$ ....(i)	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৪) আবার, COF সমকোণী ত্রিভুজে CO অতিভুজ	
$\therefore OC^2 = OF^2 + CF^2$ ....(ii)	
(৫) AO এবং OC একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ হওয়ায়, OA = OC	[একই]
সুতরাং, $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$ ....(iii)	
(৬) কিন্তু AB > CD হওয়ায়, $\frac{1}{2}$ AB $> \frac{1}{2}$ CD	
বা, AE > CF	
$\therefore AE^2 > CF^2$	
সমীকরণ (iii) নং থেকে দেখা যায়,	
AE^2 যদি CF^2 থেকে বৃহত্তর হয় তবে OE^2, OF^2 থেকে ক্ষুদ্রতর হবে।	
সুতরাং $OE^2 < OF^2$	
$\therefore$ OE < OF· **[দেখানো হলো]**	

অনুশীলনী ৮.২

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। AC ও BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, O; B, O; C, O এবং D, O যোগ করা হলো।

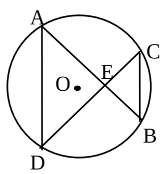
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle AEB$

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) AB চাপের ওপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADB$। $\therefore\ \angle AOB = 2\angle ADB$	[কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ (দেওয়া আছে)]
(২) CD চাপের ওপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle COD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DAC$। $\therefore\ \angle COD = 2\ \angle DAC$	[একই]
(৩) $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle ADB + 2\angle DAC = 2(\angle ADB + \angle DAC)$ ....(i)	[১ ও ২নং হতে]
(৪) ΔADE-এ বহিঃস্থ $\angle AEB$ এবং অন্তঃস্থ বিপরীত কোণগুলো হলো, $\angle EAD$ ও $\angle EDA$ অতএব, $\angle AEB = \angle EAD + \angle EDA = \angle DAC + \angle ADB$	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
(৫) সমীকরণ (i) নং এ $\angle DAC + \angle ADB = \angle AEB$ বসিয়ে পাই, $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle AEB.$ [প্রমাণিত]	

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করা হলো।

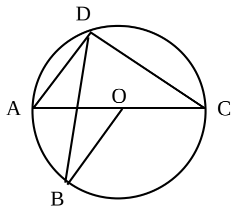
প্রমাণ করতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) BD চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ $\angle DAB$ ও $\angle BCD$ সুতরাং, $\angle DAB = \angle BCD$	[সমান চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]
(২) আবার, AC চাপের উপর অবস্থিত বলে $\angle ADC = \angle ABC$	
(৩) এখন, ΔAED ও ΔBEC এর $\angle DAE = \angle BCE$	[BD চাপের উপর অবস্থিত বলে]
$\angle ADE = \angle CBE$	[AC চাপের উপর অবস্থিত বলে]
এবং $\angle AED = \angle BEC$	[বিপ্রতীপ কোণ বলে]
অতএব, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।	**[দেখানো হলো]**

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে,

$\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

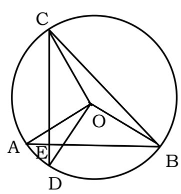
অঙ্কন : A, O; C, O এবং B, O যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) AB চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADB$ । সুতরাং $\angle AOB = 2\angle ADB$ .... (i)	[কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) আবার, BC চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$ $\therefore\ \angle BOC = 2\angle BDC$ .... (ii)	[একই]
(৩) সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $\angle AOB + \angle BOC = 2\ \angle ADB + 2\ \angle BDC$ বা, $\angle AOC = 2(\angle ADB + \angle BDC)$ $= 2\angle ADC$ $\angle ADC$ = অর্ধবৃত্তস্থকোণ $= 2 \times$ এক সমকোণ = 2 সমকোণ = এক সরলকোণ অর্থাৎ $180°$ অতএব, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত। [প্রমাণিত]	

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ADBC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে $\angle AOC$ ও $\angle BOD$ উৎপন্ন করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$·

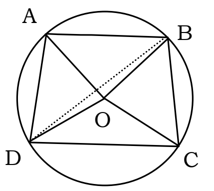
অঙ্কন : B, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) AC চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABC$· সুতরাং $\angle AOC = 2\angle ABC$········ (i)	[কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) আবার, BD চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BCD$ $\therefore \angle BOD = 2\angle BCD$·················· (ii)	[একই]
(৩) সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, অতএব, $\angle AOC + \angle BOD = 2(\angle ABC + \angle BCD)$	
(৪) এখন, ΔBCE এর বহিঃস্থ $\angle AEC = (\angle BCE + \angle CBE)$ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি বা, $\angle AEC = \angle BCD + \angle ABC$	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
(৫) অতএব, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$ **[প্রমাণিত]**	

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত এবং O তার কেন্দ্র। ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম। এর AB ।। CD এবং AD ও BC দুইটি তির্যক বাহু। দেখাতে হবে যে, BC = AD·

অঙ্কন : A, O; B, O; C, O; D, O এবং B ও D যোগ করি।

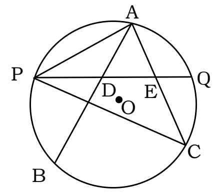
প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) BC চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$ সুতরাং, $\angle BOC = 2\angle BDC$ ······· (i)	[কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) আবার, AD চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABD$ $\therefore \angle AOD = 2\angle ABD$ ··········· (ii)	[একই]
(৩) কিন্তু $AB \parallel CD$ এবং BD ছেদক হওয়ায় $\angle ABD = \angle BDC$	[একান্তর কোণ বলে]
বা, $2\angle ABD = 2\angle BDC$ $\therefore \angle BOC = \angle AOD$	
$\therefore$ চাপ BC = চাপ AD	[সমান সমান চাপ কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে] [সমান সমান জ্যা বৃত্তে সমান চাপ ছিন্ন করে।]

অতএব BC = AD। **[দেখানো হলো]**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ AB ও AC কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AD = AE.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও AC দুটি জ্যা। P ও Q যথাক্রমে AB ও AC দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

দেখাতে হবে যে, AD = AE·

অঙ্কন : A ও P এবং P ও C যোগ করি।

প্রমাণ :

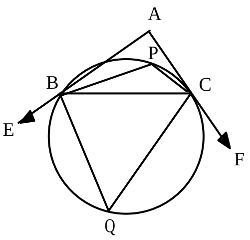
ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) P মধ্যবিন্দু হওয়ায় চাপ চাপ AP = চাপ PB $\therefore \angle ACP = \angle PAB$	[সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত বলে]
(২) আবার Q মধ্যবিন্দু হওয়ায় চাপ AQ = চাপ CQ $\therefore \angle CPQ = \angle APQ$	[সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত বলে]
সুতরাং $\angle ACP + \angle CPQ = \angle PAB + \angle APQ$	
(৩) কিন্তু, ΔPCE এ বহিঃস্থ $\angle AEP = \angle ECP + \angle EPC$	[অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি]
বা, $\angle AED = \angle ACP + \angle CPQ$	
(৪) আবার, ΔPAD–এ বহিঃস্থ $\angle ADQ = \angle PAD + \angle APD$	[অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি]
বা, $\angle ADE = \angle PAB + \angle APQ$ $= \angle ACP + \angle CPQ$ সুতরাং $\angle AED = \angle ADE$	
(৫) ΔADE এ $\angle ADE = \angle AED$ হওয়ায় AD = AE· **[দেখানো হলো]**।	

অনুশীলনী ৮.৩

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔABC এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

(২) আবার, ΔBPC-এ

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$ [একই]

বা, $\angle BPC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$ [$\because \angle PBC = \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle C$]

বা, $\angle BPC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) + \frac{1}{2}\angle A$

$= 180° - \frac{1}{2}(180°) + \frac{1}{2}\angle A$

$= 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$= 90° + \frac{1}{2}\angle A$ ....(i)

(৩) ΔBQC-এ,

$\angle BQC + \angle QBC + \angle QCB = 180°$ ..... (ii) [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

(৪) কিন্তু $\angle QBC = \frac{1}{2}\angle CBE$ এবং $\angle QCB = \frac{1}{2}\angle BCF$

বা, $\angle QBC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$ [BQ, $\angle CBE$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle QCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

সুতরাং, $\angle BQC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180°$ [(ii) নং হতে]

বা, $\angle BQC + \frac{1}{2}(180°) + \frac{1}{2}\angle A = 180°$

বা, $\angle BQC + 90° + \frac{1}{2}\angle A = 180°$

$\therefore \angle BQC = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle A$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle A$ ....(iii)

(৫) এখন সমীকরণ (i) ও (iii) যোগ করে পাই,

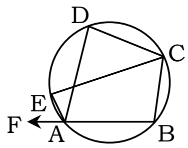
$\angle BPC + \angle BQC = 90° + \frac{1}{2}\angle A + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180°$

(৬) BPCQ চতুর্ভুজের $\angle P + \angle Q = 180°$ হওয়ায় B, P, C,Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

[প্রমাণিত]

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুভজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপরে ছেদ করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপরে ছেদ করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এর $\angle C$–এর সমদ্বিখণ্ডক CE এবং $\angle C$ এর বিপরীত $\angle A$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক AE পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দু বৃত্তস্থ।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায়, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি ২ সমকোণ]

(২) কিন্তু F, A, B একই সরলরেখা হওয়ায় $\angle FAD + \angle BAD =$ এক সরলকোণ $= 2$ সমকোণ [রৈখিক যুগল কোণ]

(৩) সুতরাং $\angle BAD + \angle BCD = \angle FAD$

$+ \angle BAD$

বা, $\angle BCD = \angle FAD$ [উভয় পক্ষ হতে সমান $\angle BAD$ বাদ দিয়ে]

বা, $\frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}\angle FAD$

বা, $\angle ECB = \angle EAD$

(৪) এখন, $\angle EAD + \angle BAD + \angle ECB$ [$\because \angle EAD = \angle ECB$]

$= \angle BAD + \angle ECB + \angle ECB$

বা, $\angle EAB + \angle ECB = \angle BAD + 2\angle ECB$

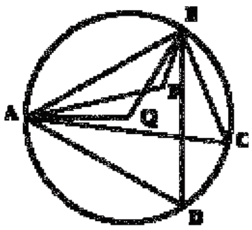
$= \angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

$\angle EAB$ ও $\angle ECB$ বিপরীত কোণ হওয়ায় ABCE চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ E বিন্দু বৃত্তস্থ। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান :



বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এ $\angle CAB + \angle CBA + \angle C = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

(২) AP সমদ্বিখণ্ডক হওয়ায়, $\angle CAB = 2\angle PAB$

এবং BP সমদ্বিখণ্ডক হওয়ায়,

$\angle CBA = 2\angle PBA$

(৩) সুতরাং, $2\angle PAB + 2\angle PBA + \angle C = 180°$

বা, $2(\angle PAB + \angle PBA) + \angle C = 180°$

(৪) কিন্তু ΔAPB-এ $\angle PAB + \angle PBA$

$= 180° - \angle P$

অতএব, $2(180° - \angle P) + \angle C = 180°$

বা, $180° - \angle P + \frac{1}{2}\angle C = 90°$

বা, $180° - 90° + \frac{1}{2}\angle C = \angle P$

$\therefore \angle P = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

(৫) ΔABD এ $\angle BAD + \angle ABD + \angle D = 180°$ [AQ ও BQ যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $2\angle BAQ + 2\angle ABQ + \angle D = 180°$

বা, $2(180° - \angle Q) + \angle D = 180°$

বা, $180° - \angle Q + \frac{1}{2}\angle D = 90°$

বা, $180° - 90° + \frac{1}{2}\angle D = \angle Q$

$\therefore \angle Q = 90° + \frac{1}{2}\angle D = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

(৬) AB চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ

$\angle C =$ বৃত্তস্থ $\angle D$ [৪ ও ৫ নং হতে]

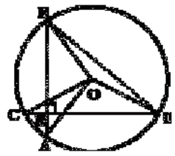
$\therefore \angle P = \angle Q$

যেহেতু AB বৃত্তের চাপ এবং AB এর উপর $\angle P$ ও $\angle Q$ অবস্থিত।

$\therefore$ A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ACBD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। O, A; O, C; O, B এবং O, D যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) AD চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABD$

সুতরাং $\angle AOD = 2\angle ABD$ [একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

(২) আবার, BC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$

$\therefore \angle BOC = 2\angle BDC$ [একই]

(৩) $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2\angle ABD + 2\angle BDC$

$= 2(\angle ABD + \angle BDC)$

(৪) কিন্তু BED সমকোণী ত্রিভুজে,

$\angle BED =$ এক সমকোণ হওয়ায়,

$\angle EBD + \angle EDB =$ এক সমকোণ

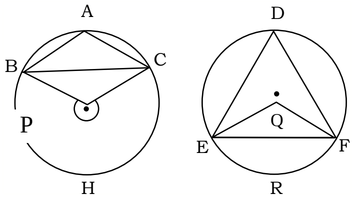
বা, $\angle ABD + \angle BDC =$ এক সমকোণ

অতএব, $\angle AOD + \angle BOC$

$= 2 \times$ এক সমকোণ $= 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।



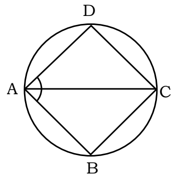
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF দুটির ভূমি BC = EF। শিরঃকোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle D$ এবং $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BHC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধি $\angle BPC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$ বা $\angle A$ $\therefore \angle BPC = 2\angle A$	[কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) আবার, Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ERF চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle EQF$ এবং বৃত্তস্থ $\angle D$ $\therefore \angle EQF = 2\angle D$	[একই]
(৩) সুতরাং, $\angle BPC + \angle EQF$ $= 2\angle A + 2\angle D$ $= 2(\angle A + \angle D)$ $= 2 \times 2$ সমকোণ $= 4$ সমকোণ। কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 4 সমকোণ এবং BC = EF হওয়ায় BC দ্বারা ছিন্ন উপচাপ = EF দ্বারা ছিন্ন উপচাপ অর্থাৎ, BAC উপচাপ = ERF উপচাপ এবং, BHC অধিচাপ = EDF অধিচাপ।	
(৪) অতএব, BAC চাপ + BHC চাপ = ERF চাপ + EDF চাপ বা, ΔABC এর পরিবৃত্ত = ΔDEF এর পরিবৃত্ত। **[প্রমাণিত]**	

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = CD৷

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজটির বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, BC = CD৷

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক হওয়ায় ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং $\angle CAD = \angle CAB$	[চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে এর শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]
(২) এখন, CD চাপের ওপর অবস্থিত বৃত্তস্থ $\angle CAD$ এবং BC চাপের ওপর অবস্থিত বৃত্তস্থ $\angle CAB$ যেহেতু, $\angle CAB = \angle CAD$ সুতরাং চাপ BC = চাপ CD অর্থাৎ, BC = CD. **[প্রমাণিত]**	[বৃত্তস্থ কোণ সমান]

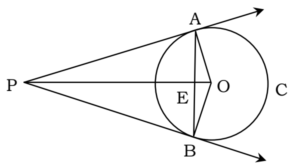
অনুশীলনী ৮.৪

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হলো। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ–জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP সরলরেখা স্পর্শ–জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং P বহিঃস্থ বিন্দু। P থেকে AP এবং BP দুইটি স্পর্শক টানা হলো। A ও B এবং O ও P যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB স্পর্শ–জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

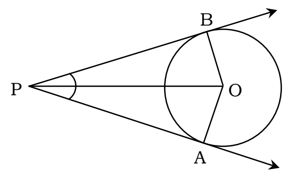
অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) OA এবং OB স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়, $\angle PAO = \angle PBO$	[এক সমকোণ]
(২) APO ও BPO সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে AP = BP	[$\because$ বহিঃস্থ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]
এবং AO = BO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
OP সাধারণ বাহু	
অতএব, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।	
$\therefore \angle AOP = \angle BOP$	
(৩) এখন, ΔAOE ও ΔBOE এর মধ্যে AO = BO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
OE সাধারণ বাহু	
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOE$	
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।	
(৪) অতএব, AE = BE এবং $\angle AEO = \angle BEO$	
(৫) কিন্তু কোণ দুটি সন্নিহিত বলে প্রতিটি এক সমকোণ।	
$\therefore$ OE, AB এর উপর লম্ব।	
OE এবং OP একই সরলরেখা হওয়ায় OP, AB এর লম্ব–দ্বিখণ্ডক। [প্রমাণিত]	

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। P, O যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ, $\angle APO = \angle BPO$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

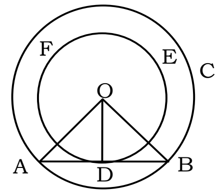
প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) ΔAPO ও ΔBPO এর মধ্যে	
AP = BP	[বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]
OA = OB	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এবং OP = OP	[বাহু সাধারণ]
অতএব, $\Delta APO \cong \Delta BPO$	[বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle APO = \angle BPO$	

অর্থাৎ, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF বৃত্তের কেন্দ্র O। AB বৃহত্তর বৃত্তের জ্যা। AB জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে D বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

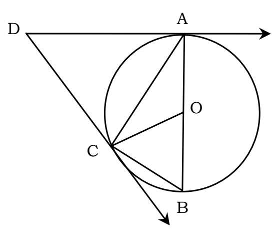
অঙ্কন : O,A; O, B এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) AB, DEF বৃত্তের D বিন্দুতে স্পর্শক এবং OD স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।	[অঙ্কনানুসারে]
$\therefore \angle ODB$ = এক সমকোণ	
$\angle ADO$ সন্নিহিত হওয়ায় $\angle ADO$ = এক সমকোণ।	
অতএব, OD, AB এর ওপর লম্ব।	
(২) এখন, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র, OD, AB জ্যা-এর ওপর লম্ব।	
সুতরাং, OD, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।	[বৃত্তের কেন্দ্র হতে কোনো জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
অর্থাৎ, D, AB এর মধ্যবিন্দু। [প্রমাণিত]	

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস AB এবং BC ব্যাসার্ধ OB অথবা OA এর সমান। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন : C, O এবং A, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) AB ব্যাস হওয়ায়,
$\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।
সুতরাং $\angle ACB = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ একসমকোণ]

(২) আবার, ΔBCO এ,
$BO = BC = CO$ [ব্যাসার্ধের সমান বলে]
$\therefore \triangle BCO$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ,
এবং $\angle BCO = 60°$

(৩) তাহলে, $\angle ACO = 90° - 60° = 30°$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

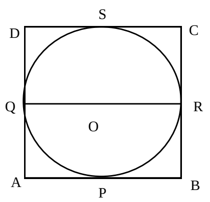
(৪) এখন $AO = CO$
$\therefore \angle CAO = \angle ACO = 30°$

(৫) AD স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়, $\angle DAO = 90°$
সুতরাং, $\angle DAC = \angle DAO - \angle CAO$
$= 90° - 30° = 60°$
একই কারণে, $\angle DCO = 90°$
অতএব, $\angle ACD = \angle DCO - \angle ACO$
$= 90° - 30° = 60°$

(৬) সুতরাং, ΔACD এ, $\angle DAC = \angle ACD$
$= 60°$ হলে $\angle ADC = 60°$ হবে।
অতএব, ΔACD সমবাহু। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুভুর্জের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে পরিলিখিত। চতুর্ভুজের AB ও CD বিপরীত বাহু দুইটি কেন্দ্রে $\angle AOB$ ও $\angle COD$ উৎপন্ন করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : O, S; O, Q; O, R এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ **যথার্থতা**

(১) ΔAOP ও ΔAOQ এর মধ্যে,
$AP = AQ\cdot$
$OP = OQ$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OA সাধারণ বাহু
$\therefore \Delta AOP \cong \Delta AOQ$ [বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle AOP = \angle AOQ$ .... (i)

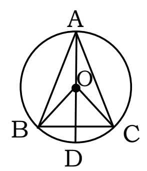
(২) এরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,
$\angle POB = \angle ROB$ .... (ii)
$\angle COR = \angle COS$ .... ·(iii)
এবং $\angle DOQ = \angle DOS$ .... (iv)

(৩) এখন, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 4$ সমকোণ
বা, $\angle AOB + \angle BOR + \angle COR + \angle COD + \angle AOQ + \angle DOQ = 4$ সমকোণ
বা, $\angle AOB + \angle POB + \angle COS + \angle COD + \angle AOP + \angle DOS = 4$ সমকোণ
বা, $\angle AOB + (\angle POB + \angle AOP) + (\angle COS + \angle DOS) + \angle COD = 4$ সমকোণ
বা, $\angle AOB + \angle COD + \angle AOB + \angle COD = 4$ সমকোণ
বা, $2(\angle AOB + \angle COD) = 4$ সমকোণ
বা, $\angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ
$\therefore$ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। **[প্রমাণিত]**

অনুশীলনী ৮.৫

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১· **নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :**
i. বৃত্তে স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব
ii. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ
iii. বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ● i, ii ও iii



ওপরের চিত্র অনুযায়ী ২ ও ৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

২· **$\angle BOD$ এর পরিমাণ হবে–**

ক. $\frac{1}{2}\angle BAC$ খ. $\frac{1}{2}\angle BAD$

গ. $2\angle BAC$ ● $2\angle BAD$

ব্যাখ্যা : আমরা জানি, বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। $\therefore \angle BOD = 2\angle BAD$

৩. **বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের–**

ক. অন্তর্বৃত্ত ● পরিবৃত্ত

গ. বহিঃবৃত্ত ঘ. উপবৃত্ত

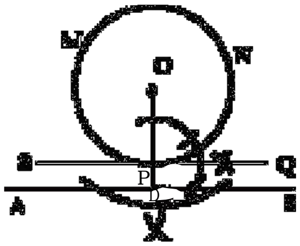
৪. **কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ–**

● সূক্ষ্মকোণ খ. সমকোণ

গ. স্থূল কোণ ঘ. পূরককোণ

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

সমাধান :



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট MNP একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এ বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা AB এর সমান্তরাল হয়।

অঙ্কন :

(১) O হতে AB এর ওপর OD লম্ব আঁকি। OD লম্ব বৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) এখন P বিন্দুতে PQ স্পর্শক আঁকি।

(৩) QP কে S পর্যন্ত বর্ধিত করি। তাহলে SQ-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ :

অঙ্কনানুসারে OD, AB এর ওপর লম্ব।

$\therefore \angle D =$ এক সমকোণ।

আবার, PQ, OP এর P বিন্দুতে স্পর্শক হওয়ায়,

$\angle OPQ =$ এক সমকোণ।

অতএব, $\angle D = \angle OPQ$

কিন্তু কোণ দুইটি অনুরূপ এবং OPD একই সরলরেখা।

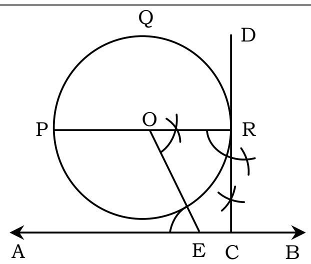
সুতরাং $PQ \parallel AB$

অর্থাৎ $SQ \parallel AB$

$\therefore$ SQ নির্ণেয় স্পর্শক। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQR একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এ বৃত্তে এমন স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা AB এর ওপর লম্ব হয়।

অঙ্কন :

(১) AB এর উপর E একটি বিন্দু নিই। O, E যোগ করি।

(২) O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল POR টানি। POR বৃত্তের পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) এখন, R বিন্দুতে CD স্পর্শক আঁকি। তাহলে CD-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $PR \parallel AB$

$\therefore \angle PRC = \angle RCB$ [একান্তর কোণ বলে]

কিন্তু, CR স্পর্শক হওয়ায়, $\angle PRC =$ এক সমকোণ

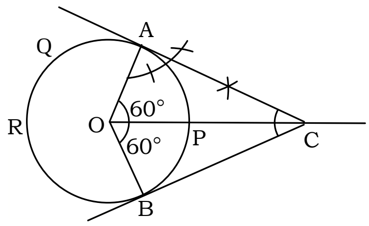
সুতরাং, $\angle RCB =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ RC, AB এর ওপর লম্ব।

অতএব, RC বা CD-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

সমাধান :



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQR একটি বৃত্ত। এ বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

অঙ্কন :

(১) পরিধির ওপর P একটি বিন্দু। O, P যোগ করি এবং বর্ধিত করি।

(২) OP এর উভয় পার্শ্বে 60° দুটি কোণ আঁকি। মনে করি কোণের বাহু দুইটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে একটি লম্ব আঁকি। লম্বটি OP এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) C, B যোগ করি। তাহলে AC ও BC-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $\angle AOC = 60^\circ$

$\angle OAC = 90^\circ$

সুতরাং, ΔAOC এ, $\angle ACO = 30^\circ$

একই কারণে OBC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle BCO = 30^\circ$

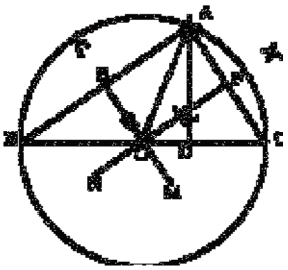
অতএব, $\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO$

$= 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

সুতরাং, AC ও BC স্পর্শকের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ 3 সে.মি., 4 সে.মি., 4·5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC = 4·5 সে.মি., AC = 3 সে.মি. এবং AB = 4 সে.মি.। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন :

(১) AB ও AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ; B, O এবং C , O যোগ করি।

(২) O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore$ OA = OB

একইভাবে, OA = OC

$\therefore$ OA = OB = OC

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে। অতএব, এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

ব্যাসার্ধ নির্ণয় : A হতে BC এর ওপর AD লম্ব আঁকি। AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABC এর পরিসীমা,

2S = AB + BC + CA = 4 + 4·5 + 3 = 11·5 সে.মি.

$\therefore$ S $= \frac{11.5}{2}$ সে.মি. = 5·75 সে.মি.

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$

$= \sqrt{5.75(5.75-4.5)(5.75-3)(5.75-4)}$

$= \sqrt{5.75 \times 1.25 \times 2.75 \times 1.75}$

= 5·88 বর্গ সে.মি.

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$\therefore \frac{1}{2} \times 4{\cdot}5 \times AD = 5{\cdot}88$

$\therefore$ AD = 2·61 সে.মি.

কিন্তু, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, তার পরিবৃত্তের ব্যাস ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)।

$\therefore AB \times AC = 2R \times AD$ [ধরি, ব্যাসার্ধ OA = R সে.মি.]

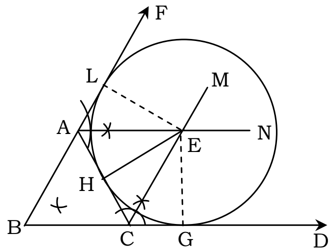
[$\because$ ব্যাস = 2R সে.মি.]

বা, $4 \times 3 = 2R \times 2{\cdot}61$ $\therefore R = 2{\cdot}3$

অতএব, বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2·3 সে.মি.।

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।



মনে করি ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.। এর AC বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি।

(২) $\angle$DCA এবং $\angle$FAC এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CM ও AN রেখা আঁকি। তারা E বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) E থেকে AC এর ওপর EH লম্ব আঁকি। EH, AC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) E-কে কেন্দ্র করে EH ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত হবে।

প্রমাণ : E হতে BD ও BF এর ওপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় রেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle$DAC-এর সমদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore$ EH = EG

একইভাবে, EH = EL

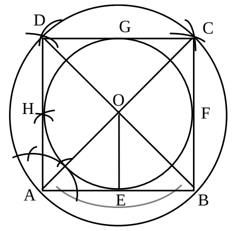
সুতরাং E কে কেন্দ্র করে EH-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে CA, CD এবং AF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে। অতএব, HGL বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



মনে করি, ABCD একটি বর্গ। ABCD বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) A, C এবং B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) O হতে AB এর ওপর OE লম্ব টানি।

(৩) O কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে EFGH-ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

এই বৃত্ত ABCD বর্গের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : বর্গের কর্ণ কোণগুলোকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং O বিন্দু হতে AB, BC, CD, DA বাহুর দূরত্ব সমান। সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি AB, BC, CD, DA বাহু স্পর্শ করবে।

অতএব, EFGH-ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার, বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

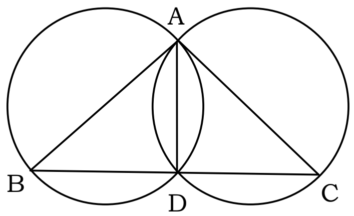
সুতরাং, OA = OB = OC = OD

সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D বিন্দু দিয়ে যায়।

অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুকে পরস্পর ছেদ করে।

সমাধান :



মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC এবং BC ভূমি। AB ও AC কে ব্যাস ধরে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্ত দুইটি BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, D, BC এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

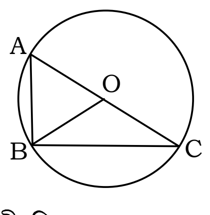
(১) AB ও AC বৃত্তের ব্যাস হওয়ায়,
$\angle ADB = \angle ADC$ = এক সমকোণ [কারণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

(২) ADC ও ADB সমকোণী ত্রিভুজ দুটির মধ্যে
অতিভুজ AC = অতিভুজ AB ;
AD = AD [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ADC \cong \Delta ABD$· [অতিভুজ–বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ CD = BD
অর্থাৎ D, BC এর মধ্যবিন্দু। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

সমাধান :



মনে করি, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ। এর $\angle B$ = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ।

এখানে O, AC অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও BO বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ।

প্রমাণ করতে হবে যে, BO = $\frac{1}{2}$ AC

অঙ্কন : O কে কেন্দ্র করে OA অথবা OC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

প্রমাণ :

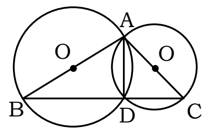
ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) যেহেতু AC বৃত্তের ব্যাস এবং $\angle ABC$ = এক সমকোণ।
সুতরাং, A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটি বৃত্তস্থ হবে।
অর্থাৎ A, B, C বৃত্তের পরিধির ওপর তিনটি বিন্দু।

(২) O বৃত্তের কেন্দ্র হওয়ায় OB = OC = OA [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
এখন, AO + OC = AC
বা, OB + OB = AC
বা, 2OB = AC
$\therefore$ OB = $\frac{1}{2}$ AC. **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

সমাধান :



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে উহা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়ে যাবে।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

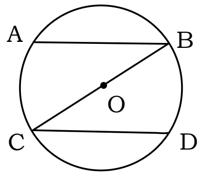
(১) AB ব্যাস হওয়ায়, $\angle ADB$ = 1 সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]

(২) B, D, C সমরেখ হওয়ায়,
$\angle ADB + \angle ADC$ = এক সরলকোণ
বা, 1 সমকোণ + $\angle ADC$ = 2 সমকোণ
বা, $\angle ADC$ = 2 সমকোণ −1 সমকোণ
= 1 সমকোণ

(৩) এখন, A, D, C বিন্দু তিনটি বৃত্তস্থ। O বৃত্তের কেন্দ্র হওয়ায়,
$\angle AOC = 2\ \angle ADC$
বা, $\angle AOC = 2 \times 1$ সমকোণ
বা, $\angle AOC$ = 2 সমকোণ
বা, $\angle AOC$ = 1 সরলকোণ
অতএব, A, O, C সমরেখ এবং AC বৃত্তের ব্যাস।
$\therefore$ AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়ে যাবে। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ AB ও CD একই বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, চাপ AC = চাপ BD.

সমাধান :



মনে করি, ABDC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা।
প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AC = চাপ BD.
অঙ্কন : B, C যোগ করি।
প্রমাণ :

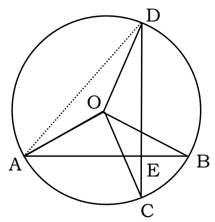
ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) AB || CD এবং BC ছেদক,
$\angle ABC = \angle BCD$ [একান্তর কোণ বলে]

(২) এখন, AC চাপের ওপর অবস্থিত বৃত্তস্থ $\angle ABC$ এবং BD চাপের ওপর অবস্থিত বৃত্তস্থ $\angle BCD$ বৃত্তস্থ কোণ দুইটি সমান হওয়ায় চাপ দুইটিও সমান।
অতএব, চাপ AC = চাপ BD. **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

সমাধান :



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, C; O, B এবং O, D যোগ করা হলো।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.
অঙ্কন : A, D যোগ করি।
প্রমাণ :

ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) AC চাপের ওপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$
সুতরাং $\angle AOC = 2\angle ADC$ ...... (i) [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

(২) আবার, BD চাপের ওপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$
$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD$ .... (ii) [একই]

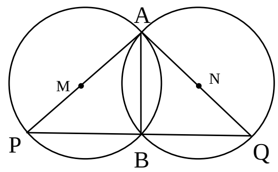
(৩) সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই,
অতএব, $2\angle ADC + 2\angle BAD = \angle AOC + \angle BOD$
বা, $2(\angle ADC + \angle BAD) = (\angle BOD + \angle AOC)$
বা, $\angle ADC + \angle BAD = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

(৪) কিন্তু ΔAED এ বহিঃস্থ $\angle AEC = \angle ADE + \angle DAE = \angle ADC + \angle BAD$ [ত্রিভুজের কোনো বহিস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

অতএব, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

সমাধান :



মনে করি, দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র M ও N।
B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, P এবং A, Q যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।
প্রমাণ :

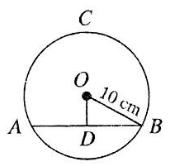
ধাপসমূহ — **যথার্থতা**

(১) AB উভয় বৃত্তের সাধারণ জ্যা। সুতরাং AB চাপের উপর M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তস্থ $\angle APB$·

(২) আবার, N কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তস্থ $\angle AQB$

$\therefore \angle APB = \angle AQB$ [সমান বা একই চাপ একই বৃত্তে বা সমান সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে]
বা, $\angle APQ = \angle AQP$
$\therefore AP = AQ$ [ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান]
এখন ΔAPQ এ,
AP = AQ হওয়ায়, ΔAPQ সমদ্বিবাহু। **[প্রমাণিত]**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB = x সে.মি., $OD \perp AB$
পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
খ. দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।
গ. OD = $\left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে x এর মান

নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে

জ্যা AB = x সে.মি. এবং $OD \perp AB$

(ক) বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OB = 10cm

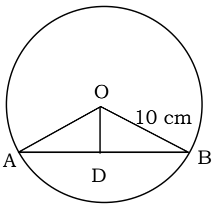
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi r^2 = 3{\cdot}1416 \times (10)^2$

$= 3{\cdot}1416 \times 100 = 314{\cdot}16$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 314·16 বর্গ সে.মি.

(খ) **বিশেষ নির্বচন :** মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB এমন একটি জ্যা $OD \perp AB$· দেখাতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন : O, A যোগ করি।



প্রমাণ :

ধাপসমূহ :

(১) $\angle ODA = \angle ODB$ = একসমকোণ [$\because OD \perp AB$]

অতএব, ΔODA ও ΔODB উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

(২) ΔODA ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OD = OD [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ–বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

অতএব, AD = BD

অর্থাৎ D, AB এর মধ্যবিন্দু। **[দেখানো হলো]**

(গ) ΔODB এ, OB = 10cm, DB = $\frac{x}{2}$ এবং OD = $\frac{x}{2} - 2$

এখন, সমকোণী ΔODB-এ

$DB^2 + OD^2 = OB^2$

বা, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = (10)^2$

বা, $\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{2} \times 2 + (2)^2 = 100$

বা, $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2x + 4 = 100$

বা, $\frac{2x^2}{4} - 2x + 4 = 100$

বা, $\frac{x^2}{2} - 2x + 4 = 100$

বা, $x^2 - 4x + 8 = 200$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^2 - 4x + 8 - 200 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$

বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$

বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$

বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$

হয় $x - 16 = 0$ অথবা, $x + 12 = 0$

বা, $x = 16$ বা, $x = -12$ [ইহা গ্রহণযোগ্য নয়]

নির্ণেয় বৃত্তের জ্যা এর দৈর্ঘ্য x = 16 সে.মি.

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.।

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

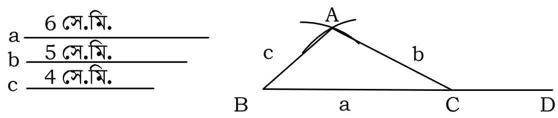
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

সমাধান :

(ক)



ত্রিভুজের তিনটি বাহু a = 6 সে.মি., b = 5 সে.মি. এবং c = 4 সে.মি. দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

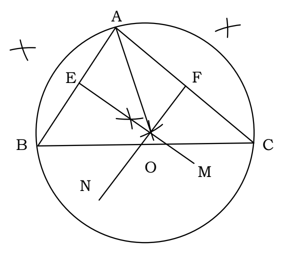
(১) যেকোনো রেখাংশ BD নেই।

(২) BD রেখাংশ থেকে a এর সমান করে BC অংশ কেটে নেই।

(৩) এখন B কে কেন্দ্র করে c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC রেখার একপাশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। আবার, C কে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC রেখার যে পাশে আগের বৃত্তচাপটি আঁকা হয়েছে সে পাশে বৃত্তচাপটি আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(খ)



ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন :

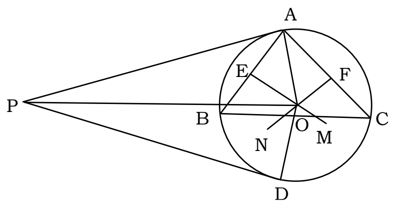
(১) AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) A, O যোগ করি।

(৩) O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি পরিবৃত্ত। বৃত্তের বহিঃস্থ P একটি বিন্দু এবং PA ও PD রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও D বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। দেখাতে হবে যে, PA = PD.



অঙ্কন : O, D ও O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ সেহেতু $PA \perp OA$. $\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ অনুরূপে, $\angle PDO =$ এক সমকোণ $\therefore$ ΔPAO এবং ΔPDO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	[বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব।]
(২) ΔPAO ও ΔPDO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ PO = অতিভুজ PO এবং OA = OD	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore$ $\Delta PAO \cong \Delta PDO$	[অতিভুজ–বাহু–উপপাদ্য]
$\therefore$ PA = PD	

অর্থাৎ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান। **(দেখানো হলো)**