

নবম অধ্যায় ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

অনুশীলনী ৯.১

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ১১ নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

(ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম।

সমাধান : উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তি : যখন $A = 45^\circ$, তখন $\tan A$ এর মান $\tan 45^\circ = 1$ । আবার, যখন

$A = 60^\circ$ তখন $\tan A$ এর মান

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.732 > 1$$

অর্থাৎ $\tan A$ এর মান 1 অথবা 1 অপেক্ষা বেশিও হতে পারে।

(খ) $\cot A$ হলো \cot ও A এর গুণফল।

সমাধান : উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তি : $\cot A$ দ্বারা একটি কোণের পরিমাপকে বুঝানো হয়।

A বাদে \cot এর আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না।

(গ) A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sec A = \frac{12}{5}$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos A} = \frac{12}{5}$$

$$\text{বা, } \cos A = \frac{5}{12} = \cos 65.37^\circ$$

[ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$$\therefore A = 65.37^\circ = 65.37^\circ$$

নির্ণেয় A এর মান 65.37°

(ঘ) \cos হলো \cotangent এর সঙ্ক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান : উক্তিটি মিথ্যা।

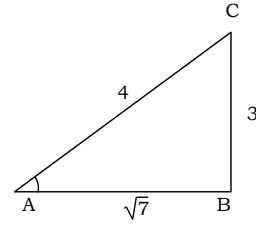
যুক্তি : \cotangent এর সঙ্ক্ষিপ্ত রূপ হলো \cot

এবং \cosine এর সঙ্ক্ষিপ্ত রূপ হলো \cos ।

প্রশ্ন ১২ $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু $BC = 3$ এবং অতিভুজ $AC = 4$



$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{4}{3}$$

প্রশ্ন ১৩ দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$

$$\therefore \cot A = \frac{8}{15}$$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু $BC = 15$

সন্নিহিত বাহু $AB = 8$

$$\text{অতিভুজ } AC = \sqrt{(15)^2 + 8^2}$$

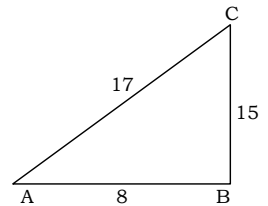
$$= \sqrt{225 + 64}$$

$$= \sqrt{289}$$

$$= 17$$

$$\therefore \sin A = \frac{15}{17} \text{ ও } \sec A = \frac{17}{8}$$

নির্ণেয় মান, $\frac{15}{17}$ ও $\frac{17}{8}$ ss



প্রশ্ন ১৪ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin \theta$, $\cos \theta$ ও $\tan \theta$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ।

$AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = (13)^2 - (12)^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = 169 - 144$$

$$\text{বা, } AC^2 = 25$$

$$\text{বা, } AC = \sqrt{25}$$

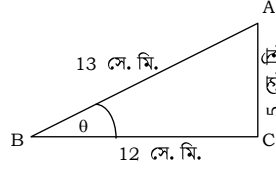
$$\therefore AC = 5$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\text{এবং } \tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$$

$$\text{নির্ণেয় মান } \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{12}$$



প্রশ্ন ১৫ ১ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ।

$\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3} \sin A \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan A = \sqrt{3}$

$$\text{অতএব, লম্ব} = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং ভূমি} = 1$$

$$\therefore \text{অতিভুজ} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{3 + 1}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{এবং } \cos A = \frac{1}{2}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{3} \sin A \cos A$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{3}{4} = \text{ডানপক্ষ}$$

সুতরাং $\sqrt{3} \sin A \cos A = \frac{3}{4}$ বাক্যটি সত্য।

■ প্রমাণ কর (৬ - ২০) :

$$\text{প্রশ্ন ১৬ ১ (i) } \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$$

$$\text{সমাধান : বামপক্ষ} = \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos A}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin A}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 A$$

$$= 1$$

$$= \text{ডানপক্ষ} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

$$\text{(ii) } \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$$

$$\text{সমাধান : বামপক্ষ} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cot A}\right)^2$$

$$= \sec^2 A - \tan^2 A$$

$$\left[\because \frac{1}{\cos A} = \sec A \text{ এবং } \frac{1}{\cot A} = \tan A \right]$$

$$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A \quad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$$

$$= 1$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

$$\text{(iii) } \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$$

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$$

$$[\because 1 - \cos^2 A = \sin^2 A]$$

$$= 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

$$\text{প্রশ্ন ১৭ ১ (i) } \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$$

$$\text{সমাধান : বামপক্ষ} = \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A}$$

$$= \frac{\sin A}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{\cos A}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$= 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

$$\text{(ii) } \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$$

$$\text{সমাধান : বামপক্ষ} = \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$$

$$= \sec A \times \frac{1}{\cos A} - \tan A \times \frac{1}{\cot A}$$

$$= \sec A \cdot \sec A - \tan A \cdot \tan A$$

$$= \sec^2 A - \tan^2 A$$

$$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$$

$$= 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ এবং } \tan A = \frac{1}{\cot A} \right]$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

$$\text{(iii) } \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$$

সমাধান :

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} \\ &= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^2 A}} \\ &= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1 + \sin^2 A} \\ &= \frac{1 + \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} \\ &= 1 = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1 \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{প্রশ্ন ১৮ ১ (i) } \frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$$

সমাধান :

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} \\ &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}} \\ &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \times \left(\frac{\sin A}{\sin A - \cos A} \right) + \frac{\cos A}{\sin A} \times \left(\frac{\cos A}{\cos A - \sin A} \right) \\ &= \frac{\sin^2 A}{\cos A (\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A (\cos A - \sin A)} \\ &= \frac{\sin^2 A}{\cos A (\sin A - \cos A)} - \frac{\cos^2 A}{\sin A (\sin A - \cos A)} \\ &= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A \cos A (\sin A - \cos A)} \\ &= \frac{(\sin A - \cos A) (\sin^2 A + \sin A \cos A + \cos^2 A)}{\sin A \cos A (\sin A - \cos A)} \\ &= \frac{1 + \sin A \cos A}{\sin A \cos A} \\ &= \frac{1}{\sin A \cos A} + \frac{\sin A \cos A}{\sin A \cos A} \\ &= \left(\frac{1}{\cos A} \right) \left(\frac{1}{\sin A} \right) + 1 \\ &= \sec A \operatorname{cosec} A + 1 \\ &= \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1 \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{(ii) } \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : বামপক্ষ} &= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ &= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = 1 = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1 \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{প্রশ্ন ১৯ ১ } \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : বামপক্ষ} &= \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\cos A}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A} \\ &= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A - \sin A} \\ &= \cos A + \sin A = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{প্রশ্ন ১০ ১ } \tan A \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A$$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : বামপক্ষ} &= \tan A \sqrt{1 - \sin^2 A} \\ &= \tan A \sqrt{\cos^2 A} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A = \sin A = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \tan A \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{প্রশ্ন ১১ ১ } \frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$$

সমাধান :

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} \\ &= \frac{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec A - \tan A)} \times \frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\operatorname{cosec} A - \cot A)} \\ &= \frac{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)} \times \frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\sec A - \tan A)} \\ &= \frac{\sec^2 A - \tan^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A} \times \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} \\ &= \frac{1 \cdot (\operatorname{cosec} A - \cot A)}{1 \cdot (\sec A - \tan A)} \\ &= \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} \\ &= \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} \text{ [প্রমাণিত]}$$

$$\text{প্রশ্ন ১২ ১ } \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$$

সমাধান :

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} \\ &= \frac{\operatorname{cosec} A (\operatorname{cosec} A + 1) + \operatorname{cosec} A (\operatorname{cosec} A - 1)}{(\operatorname{cosec} A - 1) (\operatorname{cosec} A + 1)} \\ &= \frac{\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec}^2 A - 1} \\ &= \frac{2\operatorname{cosec}^2 A}{1 + \cot^2 A - 1} \text{ [}\because \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \text{]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A} = \frac{2}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} \\
&= \frac{2}{\sin^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 A} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2 = 2 \sec^2 A \quad \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \right] \\
&= \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৩ ॥ $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \sin A + 1 + \sin A}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} \\
&= \frac{2}{1 - \sin^2 A} \\
&= \frac{2}{\cos^2 A} \quad [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A] \\
&= 2 \sec^2 A \\
&= \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৪ ॥ $\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{cosec} A + 1 - \operatorname{cosec} A + 1}{(\operatorname{cosec} A - 1)(\operatorname{cosec} A + 1)} \\
&= \frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A - 1} \\
&= \frac{2}{1 + \cot^2 A - 1} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A] \\
&= \frac{2}{\cot^2 A} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{\cot A}\right)^2 \quad \left[\because \tan A = \frac{1}{\cot A} \right] \\
&= 2 \cdot (\tan A)^2 = 2 \tan^2 A = \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৫ ॥ $\frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}{(1 - \cos A) \sin A} \\
&= \frac{\sin^2 A + 1 - 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A (1 - \cos A)} \\
&= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} \\
&= \frac{1 + 1 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1] \\
&= \frac{2 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1 - \cos A)}{\sin A (1 - \cos A)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\sin A} \\
&= 2 \operatorname{cosec} A \quad \left[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \right] \\
&= \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৬ ॥ $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tan^2 A - (\sec A - 1)(\sec A + 1)}{\tan A (\sec A + 1)} \\
&= \frac{\tan^2 A - (\sec^2 A - 1)}{\tan A (\sec A + 1)} \\
&= \frac{\tan^2 A - (1 + \tan^2 A - 1)}{\tan A (\sec A + 1)} \quad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A] \\
&= \frac{\tan^2 A - \tan^2 A}{\tan A (\sec A + 1)} \\
&= \frac{0}{\tan A (\sec A + 1)} \\
&= 0 = \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৭ ॥ $(\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$

সমাধান : বামপক্ষ = $(\tan \theta + \sec \theta)^2$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}\right)^2 \\
&= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} \\
&= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} \\
&= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\
&= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \\
&= \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $(\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৮ ॥ $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

সমাধান :

বামপক্ষ = $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sin A}{\cos A}}
\end{aligned}$$

$\left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ এবং } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} \right]$

$$\frac{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \cos B}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}{\sin B \cdot \cos A}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \cos B} \times \frac{\sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \cot A \cdot \tan B = \text{ডানপক্ষ}$$

অর্থাৎ, $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ১৯ ৥ $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{1 - \sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A - \tan A \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \sec A = \frac{1}{\cos A} \right]$$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ২০ ৥ $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)(\sec A + 1)}{(\sec A - 1)(\sec A + 1)}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)^2}{\sec^2 A - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)^2}{1 + \tan^2 A - 1}} \quad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$$

$$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)^2}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$$

$$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A}} + \cot A$$

$$= \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A \quad [\because \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A]$$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ২১ ৥ $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2} \cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1) \cos A$

বা, $\cos A = \frac{\sin A}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \sin A}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$

[লব ও হরকে $\sqrt{2} + 1$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos A = \frac{(\sqrt{2} + 1) \sin A}{2 - 1}$

বা, $\cos A = (\sqrt{2} + 1) \sin A$

বা, $\cos A = \sqrt{2} \sin A + \sin A$

$\therefore \cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ২২ ৥ যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয়

কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan^2 A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

বা, $\tan^2 A = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1}{\cot^2 A} = \frac{1}{3} \therefore \cot^2 A = 3$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 A = 1 + 3 = 4 \quad [\because \cot^2 A = 3]$$

এবং $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$\therefore \sec^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

এখন, প্রদত্ত রাশি = $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

$$= \frac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{\frac{12 - 4}{3}}{\frac{12 + 4}{3}} = \frac{8}{16} = \frac{8}{16} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{2} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ২৩ ৥ $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A) = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A) \cdot \frac{4}{3} = 1$ [মান বসিয়ে]

$$\therefore \operatorname{cosec}A + \cot A = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১২৪ ৥ $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{b}{a}$

$$\text{বা, } \cot^2 A = \frac{b^2}{a^2} \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 1 + \cot^2 A = 1 + \frac{b^2}{a^2} \quad [\text{উভয়পক্ষে 1 যোগ করে}]$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 A = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\text{বা, } \sin^2 A = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{বা, } \sin A = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

আবার, $\sin^2 A = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$ হলে,

$$1 - \cos^2 A = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{বা, } 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \cos^2 A$$

$$\text{বা, } \frac{a^2 + b^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \cos^2 A$$

$$\text{বা, } \cos^2 A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{বা, } \cos A = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$$

$$= \frac{a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \text{ (Ans.)}$$

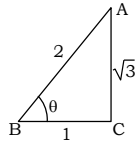
অনুশীলনী ৯.২

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ১১ ৥ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot \theta$ এর মান কোনটি?

- $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (খ) 1 (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) 2

$$\begin{aligned} \text{ব্যখ্যা : } AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{4 - 1} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\therefore \cot \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

প্রশ্ন ১২ ৥ (i) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$(ii) \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$(iii) \cot^2 \theta = 1 - \tan^2 \theta$$

উপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক?

- i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

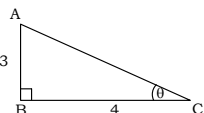
$$\text{ব্যখ্যা : } \sin^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\therefore \text{তথ্যানুসারে i ও ii সঠিক।}$$



চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

প্রশ্ন ১৩ ৥ $\sin \theta$ এর মান কোনটি?

- ক. $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{4}{3}$ ● $\frac{3}{5}$ ঘ. $\frac{4}{5}$

$$\text{ব্যখ্যা : } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

প্রশ্ন ১৪ ৥ $\cot \theta$ এর মান কোনটি?

- ক. $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{3}{5}$ গ. $\frac{4}{5}$ ● $\frac{4}{3}$

$$\text{ব্যখ্যা : } \cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$$

■ মান নির্ণয় কর (৫-৮)

প্রশ্ন ১৫ ৥ $\frac{1 - \cot^2 60^\circ}{1 + \cot^2 60^\circ}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $\frac{1 - \cot^2 60^\circ}{1 + \cot^2 60^\circ}$

$$= \frac{1 - (\cot 60^\circ)^2}{1 + (\cot 60^\circ)^2} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৬ ৥ $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

$$= 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = \frac{3}{4} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ১৭ ৥ $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + (2)^2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + 4 = \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}} + 4 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) + 4$$

$$= \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ১৮ ৥ $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times (2)^2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{Ans.})$$

■ দেখাও যে, (৯ - ১৫)

প্রশ্ন ১৯ ৥ $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$.

সমাধান : আমরা জানি, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

এবং $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ = $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ডানপক্ষ = $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১০ ৥ $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

সমাধান : আমরা জানি, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

এবং $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

এখন, বামপক্ষ = $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ডানপক্ষ = $\sin 90^\circ = 1$

অর্থাৎ, $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১১ ৥ $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

সমাধান :

বামপক্ষ = $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \text{ডানপক্ষ}$$

অর্থাৎ, $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$ [দেখানো হলো]

প্রশ্ন ১২ ৥ $\sin 3A = \cos 3A$ যদি $A = 15^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 15^\circ$

বামপক্ষ = $\sin 3A$

$$= \sin (3 \times 15^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ডানপক্ষ = $\cos 3A$

$$= \cos (3 \times 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

অর্থাৎ, $\sin 3A = \cos 3A$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১৩ ৥ $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

বামপক্ষ = $\sin 2A = \sin (2 \times 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

ডানপক্ষ = $\frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$$= \frac{2 \tan 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \frac{2 \times 1}{1 + 1^2} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

অর্থাৎ, $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১৪ ৥ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 30^\circ$

বামপক্ষ = $\tan 2A$

$$= \tan (2 \times 30^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

ডানপক্ষ = $\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$$= \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

অর্থাৎ, $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১৫ ৥ $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 60^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 60^\circ$

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \cos 2A \\ &= \cos(2 \times 60^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \\ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) \\ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ডানপক্ষ} &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ &= \frac{1 - \tan^2 60^\circ}{1 + \tan^2 60^\circ} \\ &= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1 - 3}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১৬ ২ $\cos(A + B) = 1 = 2 \sin(A - B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ, B = 15^\circ$ ।

সমাধান : দেওয়া আছে, $2 \cos(A + B) = 1$

$$\text{বা, } \cos(A + B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos(A + B) = \cos 60^\circ \quad [\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$\text{বা, } A + B = 60^\circ \dots\dots\dots(i)$$

আবার, $2 \sin(A - B) = 1$

$$\text{বা, } \sin(A - B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(A - B) = \sin 30^\circ \quad [\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$\text{বা, } A - B = 30^\circ \dots\dots\dots(ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2A = 90^\circ \quad \therefore A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

A এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$B = 60^\circ - A = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ \text{ এবং } B = 15^\circ \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১৭ $\cos(A - B) = 1, 2 \sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos(A - B) = 1$

$$\text{বা, } \cos(A - B) = \cos 0^\circ$$

$$\therefore A - B = 0^\circ \dots\dots\dots(i)$$

আবার, $2 \sin(A + B) = \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \sin 60^\circ$$

$$\therefore A + B = 60^\circ \dots\dots\dots(ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$A - B = 0^\circ$$

$$A + B = 60^\circ$$

$$\hline 2A = 60^\circ$$

$$\text{বা, } A = \frac{60^\circ}{2} \therefore A = 30^\circ$$

A-এর মান সমীকরণ (ii)-এ বসিয়ে পাই,

$$30^\circ + B = 60^\circ$$

$$\text{বা, } B = 60^\circ - 30^\circ \quad \therefore B = 30^\circ$$

নির্ণেয় মান $A = 30^\circ$ এবং $B = 30^\circ$ ।

প্রশ্ন ১৮ সমাধান কর : $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

সমাধান : $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

$$\text{বা, } \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1}$$

[যোজন ও বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2 \cos A}{-2 \sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A}{-\sin A} = -\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot A = \cot 30^\circ \therefore A = 30^\circ \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৯ A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A + B) = 1, \cot(A - B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম শর্তানুযায়ী

$$\cot(A + B) = 1$$

$$\text{বা, } \cot(A + B) = \cot 45^\circ \quad [\because \cot 45^\circ = 1]$$

$$\therefore A + B = 45^\circ \dots\dots\dots(i)$$

আবার, ২য় শর্তানুযায়ী

$$\cot(A - B) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot(A - B) = \cot 30^\circ \quad [\because \cot 30^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\therefore A - B = 30^\circ \dots\dots\dots(ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2A = 75^\circ$$

$$\text{বা, } A = \frac{75^\circ}{2} = 37 \frac{1}{2}$$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$B = 45 - A$$

$$= 45^\circ - \frac{75^\circ}{2}$$

$$= \frac{90^\circ - 75^\circ}{2} = \frac{15^\circ}{2} = 7 \frac{1}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান } A = 37 \frac{1}{2}; B = 7 \frac{1}{2}$$

প্রশ্ন ২০ দেখাও যে, $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 3A$$

$$= \cos(3 \times 30^\circ)$$

$$= \cos 90^\circ = 0 \quad [\because \cos 90^\circ = 0]$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$= 4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

অর্থাৎ, $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১১ ১১ সমাধান কর : $\sin \theta + \cos \theta = 1$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin \theta + \cos \theta = 1$

বা, $\sin \theta = 1 - \cos \theta$

বা, $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2 \theta = 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta$

বা, $1 - \cos^2 \theta = 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta$ [$\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$]

বা, $1 - \cos^2 \theta - 1 + 2\cos \theta - \cos^2 \theta = 0$

বা, $-2\cos^2 \theta + 2\cos \theta = 0$

বা, $-2\cos \theta (\cos \theta - 1) = 0$

হয়, $-2\cos \theta = 0$

অথবা, $\cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = \frac{0}{-2} = 0$

বা, $\cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \cos 90^\circ$ [$\because \cos 90^\circ = 0$]

বা, $\cos \theta = \cos 0^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$

$\therefore \theta = 0^\circ$

নির্ণয় সমাধান, $\theta = 0^\circ$ অথবা 90°

প্রশ্ন ১১ ২২ সমাধান কর : $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5 \cos \theta$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5 \cos \theta$

বা, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 + 5 \cos \theta = 0$

বা, $\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) - 2 + 5 \cos \theta = 0$

[$\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$]

বা, $\cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta - 2 + 5 \cos \theta = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta - \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2 \cos \theta (\cos \theta + 3) - 1 (\cos \theta + 3) = 0$

বা, $(\cos \theta + 3) (2 \cos \theta - 1) = 0$

হয়, $\cos \theta + 3 = 0$

অথবা, $2 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = -3$

বা, $2 \cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

যেহেতু, $\cos \theta$ এর মান সর্বদা -1 ও $+1$ এর মধ্যবর্তী সূত্রাং $\cos \theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \cos 60^\circ$ [$\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$]

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণয় সমাধান $\theta = 60^\circ$

প্রশ্ন ১১ ২৩ সমাধান কর : $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $-2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$ [-1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$

বা, $2 \cos \theta (\cos \theta - 1) - 1 (\cos \theta - 1) = 0$

বা, $(\cos \theta - 1) (2 \cos \theta - 1) = 0$

হয়, $\cos \theta - 1 = 0$

অথবা, $2 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = 1 = \cos 0^\circ$

বা, $2 \cos \theta = 1$

$\therefore \theta = 0^\circ$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণয় সমাধান, $\theta = 60^\circ$

[যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ]

প্রশ্ন ১১ ২৪ সমাধান কর : $\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

সমাধান : $\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan^2 \theta - \tan \theta - \sqrt{3} \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan \theta (\tan \theta - 1) - \sqrt{3} (\tan \theta - 1) = 0$

বা, $(\tan \theta - 1) (\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$

হয় $\tan \theta - 1 = 0$

অথবা, $\tan \theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$

বা, $\tan \theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণয় সমাধান, $\theta = 45^\circ$ এবং 60°

[বি. দ্র. : পাঠ্যবইয়ে উত্তর ভুল আছে]

প্রশ্ন ১১ ২৫ মান নির্ণয় কর : $3 \cot^2 60^\circ + \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5 \sin^2 45^\circ - 4 \cos^2 60^\circ$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $3 \cot^2 60^\circ + \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

+ $5 \sin^2 45^\circ - 4 \cos^2 60^\circ$

= $3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4} \times (2)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

= $3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 4 + 5 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{4}$

= $1 + 1 + \frac{5}{2} - 1 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$

নির্ণয় মান $\frac{7}{2}$.

প্রশ্ন ১১ ২৬ ΔABC এর $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm

(ক) AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) $\angle C = \theta$ হলে $\sin \theta + \cos \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$

সমাধান :

(ক) যেহেতু $\angle B = 90^\circ$, সেহেতু ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AC এর অতিভুজ।

\therefore পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

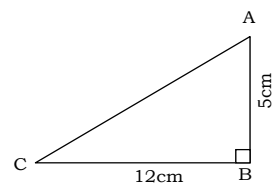
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = (5)^2 + (12)^2$

বা, $AC^2 = 25 + 144$

বা, $AC^2 = 169$

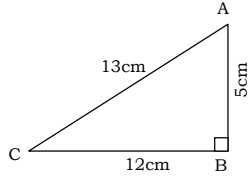
বা, $AC = \sqrt{169}$



$$\therefore AC = 13\text{cm (Ans.)}$$

(খ) চিত্র হতে পাই,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$



$$\text{এবং } \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$$

নির্ণেয় মান $\frac{17}{13}$

$$(গ) \text{ বামপক্ষ} = \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta}$$

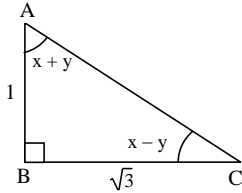
$$= \frac{1}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \text{ cosec}^2\theta = \text{ডানপক্ষ}$$

অর্থাৎ, $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \text{ cosec}^2\theta$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন II ২৭ II



(ক) AC এর পরিমাণ কত?

(খ) $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

\therefore পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

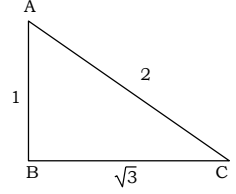
$$\text{বা, } AC^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = 1 + 3$$

$$\text{বা, } AC^2 = 4 \text{ বা, } AC = \sqrt{4} \therefore AC = 2 \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \tan A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং } \tan C = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\therefore \tan A + \tan C = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

নির্ণেয় মান $\frac{4}{\sqrt{3}}$

$$(গ) \text{ 'খ' হতে পাই, } \tan A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan A = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } A = 60^\circ$$

$$\text{বা, } x + y = 60^\circ \quad [\because \angle A = x + y]$$

$$\therefore x + y = 60^\circ \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার, } \tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan C = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } C = 30^\circ$$

$$\text{বা, } x - y = 30^\circ \quad [\because \angle C = x - y]$$

$$\therefore x - y = 30^\circ \quad \dots \dots \dots (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$x + y + x - y = 60^\circ + 30^\circ$$

$$\text{বা, } 2x = 90^\circ$$

$$\therefore x = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

x এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$$45^\circ + y = 60^\circ$$

$$\text{বা, } y = 60^\circ - 45^\circ \therefore y = 15^\circ$$

নির্ণেয় মান $x = 45^\circ$ এবং $y = 15^\circ$