ফাংশন (Function)

মনে করি, $y = x^2 - 2x + 3$ একটি ফাংশন। এখানে, x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাবে। এখানে, x এবং y উভয়ই চলক তবে, x এর মানের উপর y এর মান নির্ভরশীল। কাজেই x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং y হচ্ছে অধীন চলক।

Type-1 : মান নির্ণয়

Type-1 এর আলোকে বিভিন্ন পরীক্ষায় আগত প্রশ্ন ও সমাধান

১. $y = ax + bx$ ফাংশনের অধীন চলক কোনটি?

K ax L ax + b
M y N a ও b R

ব্যাখ্যা *$y = ax + bx$ ফাংশনে x হলো স্বাধীন চলক এবং y হলো অধীন চলক।*

২. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ফাংশনে স্বাধীন চলক কয়টি?

K 3 L 2
M 1 N 0 R

ব্যাখ্যা *প্রদত্ত ফাংশন শুধুমাত্র x হলো স্বাধীন চলক।*

জেনে রাখুন: বীজগণিতে সাধারণত x, y, z কে চলক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

৩. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ হলে $f(0)$ = কত?
[১৬তম শিক্ষক নিবন্ধন (স্কুল পর্যায়-২)-২০১৯]

K 6 L 4
M 1 N –1 S

ব্যাখ্যা দেয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
$\therefore f(0) = 2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 1$
বা, $f(0) = -1$

৪. $f(x) = x^3 - 2x + 10$ হলে $f(0)$ = কত?
[বিভিন্ন মন্ত্রণালয়ের ব্যক্তিগত কর্মকর্তা নিয়োগ-২০১৮]

K 1 L 0
M 5 N 10 S

ব্যাখ্যা $f(x) = x^3 - 2x + 10$
$\therefore f(0) = 0^3 - 2 \times 0 + 10$
$= 10$

৫. যদি $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১২নং]

K 23 L – 7
M $\frac{-7}{16}$ N $\frac{7}{16}$ R

ব্যাখ্যা দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3$$
$$= \frac{1 + 40 - 48}{16} = \frac{1-8}{16} = \frac{-7}{16}$$

৬. $f(n) = \frac{2n+1}{2n-1}$ হলে $f(-2)$ = কত?

K 3 L –5
M –3/5 N 3/5 S

ব্যাখ্যা $f(-2) = \frac{2(-2)+1}{2(-2)-1} = \frac{-4+1}{-4-1} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

৭. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এবং $f(x) = 0$ হলে, x = কত?
[নিরাপদ খাদ্য অধিদপ্তর, বিভিন্ন পদ ২০১৯]

K – 5, 1 L 2, 3
M – 2, 3 N 1, – 5 Q

ব্যাখ্যা $x^2 - 5x + 6 = 0$
বা, $x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$
বা, $x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$
বা, $(x - 2)(x - 3) = 0$
হয়, $(x - 2) = 0$ অথবা, $x - 3 = 0$
$\therefore x = 2$ $\therefore x = 3$

৮. $f(x) = x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$ হলে, x এর মান কত?
[পররাষ্ট্র মন্ত্রণালয়, প্রশাসনিক কর্মকর্তা, ২০১৯]

K 3 L 1
M 0 N– 1 R

ব্যাখ্যা দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$
বা, $x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$
বা, $3x^3 + ax^3 = 0$
বা, $x^3(3 + a) = 0$
অর্থাৎ $x^3 = 0$
$\therefore x = 0$

৯. $f(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 9$, k এর মান কত হলে $f(3) = 0$ হবে?
[৩০তম বিসিএস]

K 1 L 1
M 2 N 0 S

ব্যাখ্যা $f(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 9$
$\therefore f(3) = (3)^3 + k(3)^2 - 6 \times 3 - 9$
$= 27 + 9k - 18 - 9$
$= (27 + 9k - 27) = 9k$
এখানে, $f(3) = 0$
বা, $9k = 0$
$\therefore k = \frac{0}{9} = 0$

১০. $f(a) = 4a^2 + 11a + 6$ এবং $f(a) = 0$ হলে a = ?
[ডাক অধিদপ্তর উপজেলা পোস্ট মাস্টার-১০]

K –2 L 2
M 1 N 3 P

ব্যাখ্যা অপশন টেস্ট করে উত্তরটি বের করি।
$\therefore f(-2) = 4 \times (-2)^2 + 11 \times (-2) + 6$
$= 4 \times 4 - 22 + 6$
$= 16 - 22 + 6 = 0$
$\therefore a = -2$

১১. যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৩নং]

K 0 L 2
M 4 N 1 Q

ব্যাখ্যা দেওয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$
$\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4.(-2) - 8$
$= -8 + 4k + 8 - 8$
$= 4k - 8$
আবার, $f(-2) = 0$ হবে যদি $4k - 8 = 0$
বা, $4k = 8$
$\therefore k = 2$
$\therefore$ k এর মান 2 হলে, $f(-2) = 0$ হবে।

১২. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হয়, তবে x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৪নং]

K 1 L 2
M 3 N সবগুলোই S

ব্যাখ্যা *শর্টকাট পদ্ধতি:*
অপশন টেস্ট করলে $x = 1, 2, 3$ তিনটি মানের জন্যই $f(x) = 0$ হয়।

বেসিক/লিখিত পদ্ধতি
দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
এখন, $f(x) = 0$
বা, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
বা, $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$
বা, $x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = 0$
বা, $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$
হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $x^2 - 5x + 6 = 0$
$\therefore x = 1$ বা, $x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$
বা, $x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$
বা, $(x - 2)(x - 3) = 0$
হয়, $x - 2 = 0$ অথবা, $x - 3 = 0$
$\therefore x = 2$ $\therefore x = 3$
$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান 1 অথবা 2 অথবা 3

১৩. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ এর অনুরূপ কোনটি? *[১৭তম বিসিএস]*

K $f(-1) = 1$ L $f(0) = 1$
M $f(-1) = 3$ N $f(1) = 1$ P

ব্যাখ্যা $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$
$\therefore f(-1) = (-1)^2 + \frac{1}{(-1)} + 1 = (1 - 1 + 1) = 1$

১৪. x, y বাস্তব রাশি এবং $f(x, y) = x^2y^2$, যদি $h(x) = (x^2 - 5)$ হয়, তবে $f(2, h(3))$ এর মান কত?
[গণপূর্ত অধিদপ্তরের উপ-সহ: প্রকৌশলী নিয়োগ-২০১৮]

K 64 L 16
M 96 N 32 P

ব্যাখ্যা $f(x, y) = x^2y^2$
এখানে, $h(x) = x^2 - 5$
$\therefore h(3) = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$
$\therefore f(2, h(3)) = (2, 4) = (2^2 \times 4^2) = (4 \times 16) = 64$

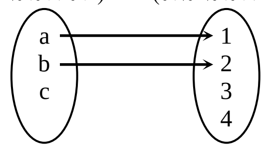
Type-2 : অন্বয় ও ফাংশন

❑ **অন্বয়:** গণিতের পরিভাষায় যেকোনো সম্পর্কই হলো অন্বয়। যেমন: মা-ছেলের সম্পর্ক, ভাই-বোনের সম্পর্ক, স্বাভাবিক সংখ্যা 3 ও 9 এর সম্পর্ক ইত্যাদি। যেহেতু যেকোনো ধরনের সম্পর্কই অন্বয়। তাই অন্বয়ে কোনো বাধাধরা নিয়ম নেই।

❑ **ফাংশন:** যদি x ও y সেট হয় এবং কোনো নিয়মের অধীনে x সেটের প্রত্যেক উপাদানের সঙ্গে y সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা হয়, তবে ঐ নিয়মকে x থেকে y এর বর্ণিত একটি ফাংশন বলা হয়।

❑ **অন্বয় যখন ফাংশন:** কোনো অন্বয় ফাংশন হতে হলে নিম্নোক্ত শর্ত দুইটি অবশ্যই মেনে চলতে হবে।
i. অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সাথে দ্বিতীয় উপাদানের অবশ্যই সম্পর্ক থাকতে হবে।
ii. প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান অবশ্যই সর্বদা ভিন্ন হবে।

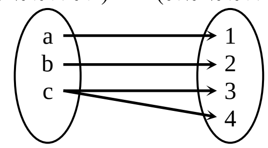
সন্তানের সেট (ডোমেনের সেট) বাবার সেট (কোডোমেনের সেট)



এটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। কেননা ডোমেনে অতিরিক্ত উপাদান (c) বিদ্যমান।

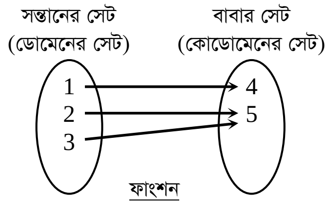
মনে রাখার কৌশল: কোনো সন্তানের বাবা না থাকলে (যা বাস্তবে সম্ভব নয়) সেটা ফাংশন হবে না।

সন্তানের সেট (ডোমেনের সেট) বাবার সেট (কোডোমেনের সেট)

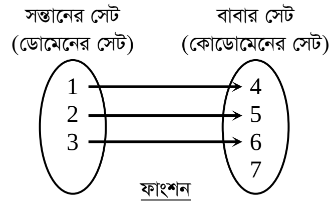


এটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। কেননা ডোমেনের উপাদান c এর দুটি প্রতিচ্ছবি (3, 4) পাওয়া যাচ্ছে।

মনে রাখার কৌশল: একই সন্তানের দুইজন বাবা থাকলে (যা বাস্তবে সম্ভব নয়) সেটা ফাংশন হবে না।



ডোমেনের উপাদান 2 ও 3 এর প্রতিচ্ছবি 5।



কো-ডোমেনের উপাদান 7 যা রেঞ্জ হিসেবে পাওয়া যাবে না।

Type-2 এর আলোকে বিভিন্ন পরীক্ষায় আগত প্রশ্ন ও সমাধান

১৫. যেকোনো ধরনের সম্পর্ককে গণিতের ভাষায় কী বলে?

K সেট L লেখ

M ফাংশন N অন্বয় S

ব্যাখ্যা *গণিতে যে কোনো সম্পর্ককে অন্বয় হিসেবে বিবেচনা করা হয় আর শর্তযুক্ত ও সুনির্দিষ্ট অন্বয়কে ফাংশন বলে।*

১৬. নিচের কোনটি এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের সেট?

K অন্বয় L ফাংশন

M সেট N ডোমেন P

ব্যাখ্যা *যেকোনো অন্বয়কে সাধারণত এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের সেট হিসেবে প্রকাশ করা হয়।*

১৭. কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশকে ভিন্ন হলে এটি কী নির্দেশ করে?

K সেট L ফাংশন

M ডোমেন N রেঞ্জ Q

ব্যাখ্যা *একটি ক্রমজোড়ের সেট কেবল তখনই একটি ফাংশন বর্ণনা করে যখন ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশক ভিন্ন হয়।*

১৮. কোনো ফাংশনের রেঞ্জ কার উপসেট?

K ডোমেন L কোডোমেন

M অন্বয় N সেট Q

ব্যাখ্যা *$f : x \to y$ বর্ণিত ফাংশনের y এর সেটকে কোডোমেন বলা হয় এবং কোডোমেন সেটের যে সকল উপাদানের ইমেজ x সেটে পাওয়া যায় তাদের সেটকে রেঞ্জ বলা হয়। এ হিসেবে ফাংশনের রেঞ্জ কোডোমেনের উপসেট।*

১৯. নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন?

K $F = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

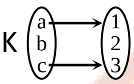
L $F = \{(-1, 1), (2, 4), (-1, 4)\}$

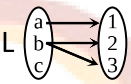
M $F = \{(2, 1), (3, 1), (2, 4)\}$

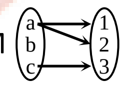
N $F = \{(-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$ S

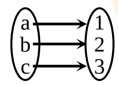
ব্যাখ্যা *একটি ক্রমজোড়ের সেট কেবল তখনই একটি ফাংশন বর্ণনা করে যখন প্রতিটি ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশক ভিন্ন হয়। অর্থাৎ একই ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় থাকলে তা ফাংশন নয়। 'ক', 'খ' ও 'গ' নং অপশনে একই উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় আছে কিন্তু 'ঘ' নং অপশনে প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন তাই এটি ফাংশন।*

২০. নিম্নে $f : X \to Y$ এ বর্ণিত কোন অন্বয়টি ফাংশন?

K 

L 

M 

N 

S

ব্যাখ্যা *$f : X \to Y$ এ বর্ণিত অন্বয় ফাংশন হবে নিম্নোক্ত শর্তে:*

i. x এর প্রতিটি উপাদানকে অবশ্যই y এর সাথে সম্পর্কিত হতে হবে।

ii. x এর একটি উপাদান একাধিক y এর সাথে সম্পর্কিত হবে না।

এ শর্তানুসারে 'ক', 'খ' ও 'গ' নং অপশনে ফাংশন হতে পারে না।

কারণ

'ক' নং এ x এর উপাদান b, y এর কোনো উপাদানের সাথে সম্পর্কিত নয়

'খ' নং এ সম্পর্কহীন উপাদান c, তাছাড়া b একাধিক y এর সাথে সম্পর্কিত

'গ' নং এ সম্পর্কহীন উপাদান b, তাছাড়া a একাধিক y এর সাথে সম্পর্কিত

শুধুমাত্র 'ঘ' নং অন্বয় উপরোক্ত শর্তদ্বয় পালন করে।

২১. নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয়?

K $S = \{(0, 1), (-1, 1), (2, 2)\}$

L $S = \{(-1, 1), (-2, 4), (2, 4)\}$

M $S = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3)\}$

N $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ R

ব্যাখ্যা *একটি ক্রমজোড়ের সেট কেবল তখনই একটি ফাংশন বর্ণনা করে যখন প্রতিটি ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশক ভিন্ন হয়। অর্থাৎ একই ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় থাকলে তা ফাংশন নয়। 'গ' নং অপশনে ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় বিদ্যমান। তাই এটি ফাংশন নয়।*

Type-3 : ডোমেন ও রেঞ্জ

অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও কোডোমেন:

- **অন্বয়ের ডোমেন:** কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানের সেটকে এর ডোমেন বলে।
- **অন্বয়ের রেঞ্জ:** কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ২য় উপাদানের সেটকে এর রেঞ্জ বলে।

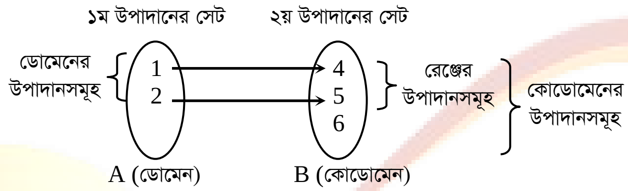
উদাহরণ: $S_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

S_1 অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানের সেট $\{1, 2, 3, 4\}$

S_1 অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ২য় উপাদানের সেট $\{2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ অন্বয়টির ডোমেন $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $S_1 = \{2, 3, 4, 5\}$

এসো আরেকটি উদাহরণ লক্ষ করি:



- **ডোমেন:** A সেটের উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ডোমেন। অর্থাৎ ডোমেন = $\{1, 2\}$।
- **কোডোমেন:** B সেটের উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে কোডোমেন। অর্থাৎ কোডোমেন = $\{4, 5, 6\}$।
- **রেঞ্জ:** A সেটের উপাদানসমূহ (1 ও 2), B সেটের দুটি (4 ও 5) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট। যেখানে $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 5$। B সেটের যেসব উপাদান, A সেটের উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট তাদের সেটকে রেঞ্জ বলে। অর্থাৎ রেঞ্জ = $\{4, 5\}$।

লক্ষণীয়: B সেটের '6' উপাদানটি কোডোমেনের অন্তর্ভুক্ত কিন্তু রেঞ্জের অন্তর্ভুক্ত নয়।

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয় সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝাবে।

অতএব, $y = f(x)$ ফাংশনের (x, y) ক্রমজোড়গুলোর x এর মানকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে।

input (x) ⟶ [function [f(x)]] ⟶ output (y)

input (x) ↓ ডোমেন; output (y) ↓ রেঞ্জ

নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো:

(a) $f(x) = x$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন = **R**

ii. ডোমেনের (x) প্রতিটি উপাদান থেকে যে প্রতিচ্ছবি / ইমেজ পাওয়া যায় তা বাস্তব সংখ্যার সেট নির্দেশ করে।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ = **R**

(b) $f(x) = x^2$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন = **R**

ii. x এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, অঋণাত্মক) জন্য f(x) এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না। অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ = $\{f(x) \in R : f(x) \geq 0\}$

অসংজ্ঞায়িত রূপ:

i. কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের মান বাস্তব সংখ্যা নয়। যেমন: $\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$ ইত্যাদির মান বাস্তব সংখ্যা নয়। সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।

ii. কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\frac{2}{0} = \infty, \frac{x}{0} = \infty, \frac{-1}{0} = \infty, \frac{2x+3}{0} = \infty$

Type-3 এর আলোকে বিভিন্ন পরীক্ষায় আগত প্রশ্ন ও সমাধান

২২. F = {(0, 0), (1, 1), (–1, 1), (2, 4)} অন্বয়ের ডোমেন কত?

K {0, 1, –1, 4} L {0, 1, 4}
M {1, 2, 4} N {0, 1, – 1, 2} S

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানের সেটকে ঐ অন্বয়ের ডোমেন বলে।*

এখানে, F অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সেট হলো
= {0, 1, – 1, 2}
∴ প্রদত্ত অন্বয়ের ডোমেন সেট: {0, 1, – 1, 2}

২৩. {(1, 5), (2, 10), (2, 12), (3, 15), (4, 20)} অন্বয়ের ডোমেন কোনটি?

K {1, 2, 3, 4} L {5, 10, 12, 15, 20}
M {1, 2, 2, 3, 4} N {1, 2, 12, 15, 20} P

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানসমূহের সেটকে ডোমেন বলে।*
∴ অন্বয়টির ১ম উপাদানের সেট বা ডোমেন = {1, 2, 3, 4}

> *বি.দ্র: সেটের সমতার সংজ্ঞানুসারে, {1, 2, 3, 4} এবং {1, 2, 2, 3, 4} উভয়ই একই অর্থ বহন করে। এরা প্রকৃতপক্ষে সমতুল সেট। এক্ষেত্রে অপেক্ষাকৃত সংক্ষিপ্ত ও সঠিক উত্তরটি বেছে নেওয়া হয়েছে।*

২৪. {(0, 0), (1, 1), (–1, 1), (2, 4)} অন্বয়ের ডোমেন কোনটি?

K {0, 1, –1, 2} L {0, 1, 4}
M {0, 1, – 1, 4} N {0, 1, 2, 4} P

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানসমূহের সেটকে ডোমেন বলে।*
∴ অন্বয়টির ১ম উপাদানের সেট বা ডোমেন = {0, 1, – 1, 2}

২৫. F = {(0, 0), (1, 2), (2, 4), (–1, 2)} অন্বয়ের রেঞ্জ কত?

K {0, 1, –1, 2} L {0, 2, 4}
M {0, 1, 2, 4} N {1, 2, 4} Q

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান সমূহের সেটকে ঐ অন্বয়ের রেঞ্জ বলে।*
∴ F অন্বয়ের ২য় উপাদানের সেট বা রেঞ্জ F = {0, 2, 4, 2}
= {0, 2, 4}

২৬. {(3, 4), (4, 3), (3, 9), (7, 8), (8, 9)} এই অন্বয়টির রেঞ্জ নিচের কোনটি?

K {4, 3, 9, 7, 8} L {4, 3, 9, 8}
M {3, 4, 3, 9, 9} N {3, 4, 7, 8} Q

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে রেঞ্জ বলে।*
∴ অন্বয়টির দ্বিতীয় উপাদানের সেট বা রেঞ্জ = {4, 3, 9, 8}

২৭. A = {(1, 5), (2, 10), (3, 15)} এর বিপরীত অন্বয়ের ডোমেন কত?

K {5, 10, 15} L {1, 2, 3}
M {1, 2, 5, 10} N {3, 2, 1} P

ব্যাখ্যা *A এর বিপরীত অন্বয় A^{-1} = {(5, 1), (10, 2), (15, 3)}*
∴ A^{-1} এর ডোমেন = {5, 10, 15}

২৮. F : $R_+ \to R_+$, F(x) = x^2 দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন কত?

K R L R_+
M $\{x \in R : x > 1\}$ N $\{x \in R : x \neq 1\}$ Q

ব্যাখ্যা *বর্ণিত ফাংশনটি R_+ হতে R_+ এ অন্বিত বিধায় ফাংশনের ডোমেন = R_+*
লক্ষণীয়: F(x) = x^2 ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত অর্থাৎ ডোমেন R হলেও শুধুমাত্র $R_+ \to R_+$ ম্যাপিং থাকায় ডোমেন R_+।

২৯. F(x) = | x | ফাংশনের ডোমেন কত?

K R L R_+
M R_0 N R – {0} P

ব্যাখ্যা *F(x) = | x | ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন সংজ্ঞায়িত। তাই প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন = R*

৩০. F(x) = $\sqrt{5x - 1}$ ফাংশনটির ডোমেন কোনটি?

K $\left\{x \in R : x \geq \frac{1}{5}\right\}$ L $\left\{x \in R : x \leq \frac{1}{5}\right\}$
M $\left\{x \in R : x > \frac{1}{5}\right\}$ N $\left\{x \in R : x < \frac{1}{5}\right\}$ P

ব্যাখ্যা *F(x) = $\sqrt{5x-1} \in R$ হবে যদি এবং কেবল যদি $5x - 1 \geq 0$*
বা, $x \geq \frac{1}{5}$ হয়।
∴ ডোমেন = $\left\{x \in R : x \geq \frac{1}{5}\right\}$

৩১. f(x) = $\sqrt{3x - 5}$ ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?

K $\left\{x \in R : x > \frac{3}{5}\right\}$ L $\left\{x \in R : x \geq \frac{3}{5}\right\}$
M $\left\{x \in R : x > \frac{5}{3}\right\}$ N $\left\{x \in R : x \geq \frac{5}{3}\right\}$ S

ব্যাখ্যা *f(x) = $\sqrt{3x-5}$*
ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $3x - 5 \geq 0$ হয় বা $x \geq \frac{5}{3}$
∴ ডোমেন = $\left\{x \in R : x \geq \frac{5}{3}\right\}$

৩২. $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{7-y}}$ এর ডোমেন কোনটি?

K $\{y \in R : y \geq 7\}$　　L $\{y \in R : y \leq 7\}$

M $\{y \in R : y > 7\}$　　N $\{y \in R : y < 7\}$　　S

ব্যাখ্যা *$f(y)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $7 - y > 0$ হয়।*

এখন, $7 - y > 0$ বা, $-y > -7$ $\therefore y < 7$

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $= \{y \in R : y < 7\}$

৩৩. $f(x) = \sqrt{1-2x}$ ফাংশনের ডোমেন কত?

K R　　L $R - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

M $x \geq \dfrac{1}{2}$　　N $x \leq \dfrac{1}{2}$　　S

ব্যাখ্যা *$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে, যদি ও কেবল যদি $1 - 2x \geq 0$ হয়।*

বা, $-2x \geq -1$

বা, $x \leq \dfrac{1}{2}$

৩৪. $F(x) = \sqrt{3x-2}$ এর ডোমেন কোনটি?

K $\left\{x \in R : x > \dfrac{2}{3}\right\}$　　L $\left\{x \in R : x \geq \dfrac{2}{3}\right\}$

M $\left\{x \in R : x \leq \dfrac{2}{3}\right\}$　　N $\left\{x \in R : x < \dfrac{2}{3}\right\}$　　Q

ব্যাখ্যা *$F(x) = \sqrt{3x-2}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে, যদি ও কেবল যদি $3x - 2 \geq 0$ হয় অর্থাৎ, $x \geq \dfrac{2}{3}$*

$\therefore$ ডোমেন $= \left\{x \in R : x \geq \dfrac{2}{3}\right\}$

৩৫. $F(x) = \dfrac{1}{x}$ এর ডোমেন কোনটি?

K $R\backslash\{0\}$　　L R

M R_+　　N R_-　　P

ব্যাখ্যা *শূন্য দ্বারা কোনো কিছুকে ভাগ করা যায় না তাই $F(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনটি শুধুমাত্র $x = 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত।*

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $R - \{0\}$ বা $R\backslash\{0\}$

Type-4 : বিপরীত, সার্বিক ও এক-এক ফাংশন

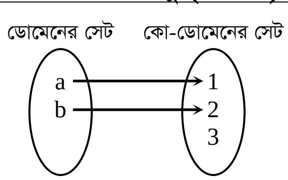
❑ **<u>বিপরীত অন্বয় নির্ণয়</u>:** কোনো অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের উপাদানগুলোর অবস্থান বিনিময়ের মাধ্যমে ঐ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়। যেমন: $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় $S^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

❑ **সার্বিক ফাংশন:** $f : x \rightarrow y$ এ কোনো ফাংশন বর্ণিত হলে x এর সেটকে ডোমেন এবং y এর সেটকে ফাংশনের কোডোমেন সেট বলে। কোনো ফাংশনের **রেঞ্জ সেট = কোডোমেন সেট** হলেই ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

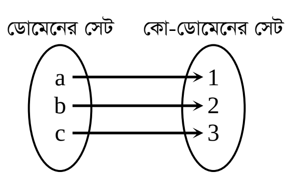
❑ **এক-এক ফাংশন:** $f : x \rightarrow y$ ফাংশনের x এর একটি মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় তাকে এক-এক ফাংশন বলে। **অথবা,** যদি কোনো ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন বলে।

<u>জেনে রাখুন</u>: যে কোনো একঘাত বিশিষ্ট সরলরৈখিক ফাংশন এক-এক ফাংশন। দ্বিঘাত সমীকরণ শর্তসাপেক্ষে এক-এক ফাংশন।

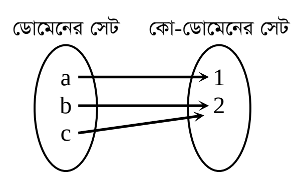
❑ **<u>এক-এক এবং সার্বিক বা অনটু (Onto) ফাংশন চেনার উপায়</u>:**



ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়। কেননা রেঞ্জ $\{1, 2\} \neq$ কো-ডোমেন $\{1, 2, 3\}$



ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।



ফাংশনটি সার্বিক কিন্তু এক-এক নয়। কেননা b ও c প্রতিচ্ছবি একই (2)।

Type-4 এর আলোকে বিভিন্ন পরীক্ষায় আগত প্রশ্ন ও সমাধান

৩৬. কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের উপাদানগুলো অবস্থান পরিবর্তন করলে কোন অন্বয় পাওয়া যায়?

K ফাংশন L বিপরীত অন্বয়
M কোডোমেন N রেঞ্জ Q

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের উপাদানগুলো অবস্থান পরিবর্তন করলে ঐ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।*

৩৭. f এর বিপরীত অন্বয়কে কোন প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়?

K f L $f \times f$
M f^{-1} N $f + f$ R

ব্যাখ্যা *f অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়কে f^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।*

৩৮. $A = \{(0, 1), (2, 4), (3, 5)\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় কত?

K $A^{-1} = \{(1, 0), (4, 2), (5, 3)\}$
L $A^{-1} = \{(1, 0), (4, 2), 5, 3\}$
M $A^{-1} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
N $A^{-1} = \{(5, 3), (2, 4), (0, 1)\}$ P

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর উপাদানের অবস্থান বিনিময়ের মাধ্যমে ঐ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।*

৩৯. $f(x) = x^2$ এর বিপরীত অন্বয় কোনটি?

K $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ L $f^{-1}(x) = 2x$
M $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ N $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ R

ব্যাখ্যা $f(x) = y = x^2$ হলে পাই, $x = f^{-1}(y)$
আবার, $y = x^2$ বা, $x = \pm\sqrt{y}$
$\therefore f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$
$\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$
বি.দ্র: $f(x) = x^2$ এর বিপরীত অন্বয় $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ ফাংশন নয়।

৪০. $f(x) = x^3 - 5$ হলে $f^{-1}(x)$ = কত?

K $(x-5)^3$ L $(x-5)^{\frac{1}{3}}$
M $(x+5)^3$ N $(x+5)^{\frac{1}{3}}$ S

ব্যাখ্যা ধরি, $y = x^3 - 5$ বা, $x^3 = 5 + y$ বা, $x = (5+y)^{\frac{1}{3}}$
$\therefore f^{-1}(y) = (5+y)^{\frac{1}{3}}$ সুতরাং $f^{-1}(x) = (5+x)^{\frac{1}{3}}$

৪১. $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $x \neq 2$ হলে $f^{-1}(2)$ এর মান কত?

K 4 L 2
M 1 N 0 P

ব্যাখ্যা বিপরীত ফাংশনের ডোমেন মূল ফাংশনের রেঞ্জ হবে
$\therefore 2 = \frac{x}{x-2}$ বা, $2x - 4 = x$ বা, $2x - x = 4$ বা, $x = 4$
অর্থাৎ $f^{-1}(2) = 4$

৪২. $f(x) = 2x^2$ হলে, $f^{-1}(-2)$ কোনটি?

K -1 L 1
M 2 N অসংজ্ঞায়িত S

ব্যাখ্যা $y = f(x) = 2x^2$ হলে পাই, $y = 2x^2$ বা, $x^2 = \frac{y}{2}$ বা, $x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$
বা, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$ $\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$
$\therefore f^{-1}(-2) = \pm\sqrt{\frac{-2}{2}} = \pm\sqrt{-1}$ যা বাস্তব নয়
অর্থাৎ অসংজ্ঞায়িত।

৪৩. $f : N \to N$ এ বর্ণিত $f(x) = x^2$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?

K $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ L $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
M $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ N $f^{-1}(x) = 2x$ P

ব্যাখ্যা $f(x) = x^2$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$
কিন্তু $f : N \to N$ এ বর্ণিত হওয়ায় $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ কারণ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা ধনাত্মক সংখ্যা।

৪৪. নিম্নের কোনটির বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয়?

K $f(x) = x^2$ L $f(x) = (x + 1)$
M $f(x) = \ln x$ N $f(x) = 2x + b$ P

ব্যাখ্যা $f(x) = x^2$ এর বিপরীত অন্বয় $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ এখানে x এর একটি মানের বিপরীতে $f^{-1}(x)$ এর দুইটি মান পাওয়া যায় বিধায় এটি ফাংশন নয়।

৪৫. $f : Z \to Z$ এ বর্ণিত কোন ফাংশনটি সার্বিক?

K $f(x) = x^2$ L $f(x) = |x|$
M $f(x) = (x-1)^2$ N $f(x) = 2x + 5$ S

ব্যাখ্যা *সকল একঘাতবিশিষ্ট তথা সরলরৈখিক ফাংশনের লেখ এক-এক ও সার্বিক আবার দ্বিঘাত সমীকরণ নির্দিষ্ট শর্তাধীনে এক-এক ও সার্বিক। এখানে কোনো শর্ত না থাকায় 'ঘ' নং সঠিক উত্তর।*

৪৬. কোনো ফাংশনে ডোমেনের প্রতিটি উপাদানের প্রতিটি ইমেজ এবং কোডোমেন সেটের প্রতিটি উপাদানের অন্তঃত একটি প্রি-ইমেজ থাকে তাহলে ফাংশনটিকে কী বলে?

K এক-এক ফাংশন L বিপরীত ফাংশন
M সার্বিক ফাংশন N কোডোমেনের সেট R

৪৭. নিচের কোনটি এক-এক ফাংশন?

K $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
L $\{(1, 1), (-1, 1), (2, 2)\}$
M $\{(0, 0), (-1, 0), (2, 0)\}$
N $\{(-1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ P

ব্যাখ্যা *কোনো অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম অংশকের ইমেজ ভিন্ন হলে অন্বয়টি এক-এক ফাংশন নির্দেশ করে। এ হিসেবে (ক) সঠিক উত্তর।*
উল্লেখ্য, অন্বয় এক-এক ফাংশন হতে হলে ১ম ও ২য় উপাদান কোনোটির পুনরাবৃত্তি থাকা যাবে না।

৪৮. $f : R \to R$ এ বর্ণিত নিম্নের কোন ফাংশনটি এক-এক?

K $f(x) = x^2$ L $f(x) = \sqrt{x}$
M $f(x) = |x|$ N $f(x) = x^4$ Q

ব্যাখ্যা $f : R \rightarrow R$ এ বর্ণিত $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনে $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 = x_2$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ পাওয়া যায়। তাই $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটি এক-এক।

> **দৃষ্টি আকর্ষণ:** শর্ত না থাকলে, কোনো রাশির জোড় ঘাত থাকলে অথবা পরমমান থাকলে, এক-এক ফাংশন হয় না।

৪৯. নিচের কোনটি এক-এক ফাংশন?

K $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ L $F(x) = x^2$

M $F(x) = (2x - 1)^2$ N $F(x) = \dfrac{1}{(2x + 1)^2}$ P

ব্যাখ্যা শুধুমাত্র 'ক' নং অপশনের ক্ষেত্রে, $x_1, x_2 \in$ ডোম F এর ক্ষেত্রে $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1 = x_2$ হয়। তাই সঠিক উত্তর (ক)।

> **দৃষ্টি আকর্ষণ:** শর্ত না থাকলে, কোনো রাশির জোড় ঘাত থাকলে অথবা পরমমান থাকলে, এক-এক ফাংশন হয় না।

৫০. নিচের কোন ফাংশনটি এক-এক?

K $F(x) = x^2 + 3$ L $F(x) = x^2 - 3$

M $F(x) = \dfrac{1}{x - 3} : x \neq 3$ N $F(x) = \dfrac{3}{|x|} : x \neq 0$ R

ব্যাখ্যা x এর একটি মানের জন্য $F(x)$ এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় $F(x) = \dfrac{1}{x - 3}$; $x \neq 3$ ফাংশনে।

> **দৃষ্টি আকর্ষণ:** শর্ত না থাকলে, কোনো রাশির জোড় ঘাত থাকলে অথবা পরমমান থাকলে, এক-এক ফাংশন হয় না।

৫১. নিচের কোন ফাংশনটি এক-এক নয়?

K $F(x) = 2x + 3$ L $F(x) = \dfrac{4}{x - 1}$

M $F(x) = \sqrt{x - 1}$ N $F(x) = x^2$ S

ব্যাখ্যা $F(x) = x^2$ এক-এক নয় কারণ $F(1) = 1$ এবং $F(-1) = 1$ অর্থাৎ ডোমের প্রতিটি উপাদানের ইমেজ ভিন্ন নয়।

> **দৃষ্টি আকর্ষণ:** শর্ত না থাকলে, কোনো রাশির জোড় ঘাত থাকলে অথবা পরমমান থাকলে, এক-এক ফাংশন হয় না।

৫২. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$ ফাংশনটি x এর কোন মানের জন্য অসংজ্ঞায়িত?

K $\dfrac{1}{2}$ L 2

M 1 N $-\dfrac{1}{2}$ S

ব্যাখ্যা $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত হবে যদি হর $2x + 1 = 0$ হয় বা, $x = -\dfrac{1}{2}$

৫৩. $F(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে কোনটি অসংজ্ঞায়িত?

K $F(1)$ L $F(0)$

M $F(2)$ N $F(-1)$ R

ব্যাখ্যা $x = 2$ হলে পাই, $F(2) = \dfrac{1}{2 - 2} = \dfrac{1}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত।

সুতরাং $F(2)$ অনির্ণেয়।

Written Preparation

৫৪. যদি $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১২নং]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3$$

$$= \frac{1 + 40 - 48}{16} = \frac{1 - 8}{16} = \frac{-7}{16}$$

৫৫. $f(x) = x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$ হলে, x এর মান কত?

[পররাষ্ট্র মন্ত্রণালয়, প্রশাসনিক কর্মকর্তা, ২০১৯]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$

বা, $x^3 + ax^3 + 2x^3 = 0$

বা, $3x^3 + ax^3 = 0$

বা, $x^3(3 + a) = 0$

অর্থাৎ $x^3 = 0$

$\therefore x = 0$

৫৬. যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৩নং]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

দেওয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$

$\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4.(-2) - 8$

$= -8 + 4k + 8 - 8$

$= 4k - 8$

আবার, $f(-2) = 0$ হবে যদি $4k - 8 = 0$

বা, $4k = 8$

$\therefore k = 2$

$\therefore$ k এর মান 2 হলে, $f(-2) = 0$ হবে।

৫৭. $f(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 9$, k এর মান কত হলে $f(3) = 0$ হবে?

[৩০তম বিসিএস লিখিত]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

$f(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 9$

$\therefore f(3) = (3)^3 + k(3)^2 - 6 \times 3 - 9$

$= 27 + 9k - 18 - 9$

$= 27 + 9k - 27 = 9k$

এখানে, $f(3) = 0$

বা, $9k = 0$

$\therefore k = \dfrac{0}{9} = 0$

৫৮. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x(1-x)}$ হলে, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = ?$

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + 1}{\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1 - 2x + x^3}{x^3}}{\frac{(x-1)}{x^2}} \times \frac{x^2}{x-1} = \frac{1 - 2x + x^3}{x(x-1)}$$

৫৯. যদি $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\dfrac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৫নং]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{2\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$$

বা, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\frac{2}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}-1}$

বা, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\frac{2+x^2}{x^2}}{\frac{2-x^2}{x^2}}$

বা, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2+x^2}{x^2} \times \dfrac{x^2}{2-x^2}$

বা, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$

বা, $\dfrac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \dfrac{2+x^2+2-x^2}{2+x^2-2+x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \dfrac{4}{2x^2}$

$\therefore \dfrac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \dfrac{2}{x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \dfrac{2}{x^2}$

৬০. $g(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, $g\left(\dfrac{1}{x^2}\right) =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৬নং]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-1 (MCQ) এর অনুরূপ]**

প্রদত্ত ফাংশন $g(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\therefore g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^4}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^8} \times \frac{x^4}{1} = \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4}$$

৬১. $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ একটি ফাংশন হলে, $\dfrac{f(x)+2}{f(x)-1}$ এর মান নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণির গণিত অনুশীলনী-২.২]*

লিখিত পদ্ধতি **[Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]**

$$\frac{f(x)+2}{f(x)-1} = \frac{\frac{4x-7}{2x-4}+2}{\frac{4x-7}{2x-4}-1}$$

$$= \frac{\frac{4x-7+4x-8}{2x-4}}{\frac{4x-7-2x+4}{2x-4}} = \frac{8x-15}{2x-3}$$

৬২. F = {(0, 0), (1, 1), (–1, 1), (2, 4)} অন্বয়ের ডোমেন কত?

লিখিত পদ্ধতি **[Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]**

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানের সেটকে ঐ অন্বয়ের ডোমেন বলে।

এখানে, F অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সেট হলো
$= \{0, 1, -1, 2\}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্বয়ের ডোমেন সেট: $\{0, 1, -1, 2\}$

৬৩. A = {(1, 5), (2, 10), (3, 15)} এর বিপরীত অন্বয়ের ডোমেন কত?

লিখিত পদ্ধতি **[Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]**

A এর বিপরীত অন্বয় $A^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3)\}$

$\therefore A^{-1}$ এর ডোমেন $= \{5, 10, 15\}$

৬৪. F(x) = | x | ফাংশনের ডোমেন কত?

লিখিত পদ্ধতি **[Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]**

$F(x) = |x|$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন সংজ্ঞায়িত।
তাই প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন = R

৬৫. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হবে যদি $2x + 1 = 0$ হয়

বা, $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

৬৬. F = {(0, 0), (1, 2), (2, 4), (–1, 2)} অন্বয়ের রেঞ্জ কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান সমূহের সেটকে ঐ অন্বয়ের রেঞ্জ বলে।

$\therefore$ F অন্বয়ের ২য় উপাদানের সেট বা রেঞ্জ $F = \{0, 2, 4, 2\}$
$= \{0, 2, 4\}$

৬৭. f : x → 4x + 2 ফাংশনের ডোমেন D = {1, 2, 3} হলে রেঞ্জ R = কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

ডোমেন সেটের প্রতিটি সদস্যের ইমেজ সেটই হবে ফাংশনের রেঞ্জ।

এখন, $f(x) = 4x + 2$ হলে, $f(1) = 4.1 + 2 = 6$
$f(2) = 4.2 + 2 = 10$
$f(3) = 4.3 + 2 = 14$

$\therefore$ রেঞ্জ সেট $= \{6, 10, 14\}$

৬৮. F(x) = 3x + 1, 0 ≤ x ≤ 2 হলে উক্ত ফাংশনের রেঞ্জ হবে–

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

$0 \le x \le 2$ ব্যবধিতে x এর সকল মানের জন্য F(x) এর মানই হবে ফাংশনের রেঞ্জ।

এখন, $F(0) = 3.0 + 1 = 1$ এবং $F(2) = 3.2 + 1 = 7$

দেখা যাচ্ছে যে, $0 \le x \le 2$ ব্যবধিতে F(x) এর মান 1 থেকে 7 পর্যন্ত বিস্তৃত বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ [1, 7]

৬৯. $f(x) = x^3$ ফাংশনের ডোমেন (0, 3) হলে রেঞ্জ কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

(0, 3) ব্যবধিতে f(x) এর মান (0, 27) ব্যবধিতে অবস্থিত।

কারণ $f(x) = 0^3 = 0; f(3) = 3^3 = 27$

$\therefore$ f(x) এর রেঞ্জ (0, 27)

৭০. যদি f(x) = 4x – 1 এবং 0 ≤ x ≤ 3 হয় তাহলে f ফাংশনের রেঞ্জ কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

$f(x) = 4x - 1$ এবং $0 \le x \le 3$ ব্যবধির ডোমেনের জন্য f(x) এর মান হবে: $f(0) = 4 \times 0 - 1 = -1$

আবার $f(3) = 4 \times 3 - 1 = 11$

$\therefore$ রেঞ্জ $= \{y \in R : -1 \le y \le 11\}$

৭১. R = {(x, y) : x ∈ A, y ∈ A এবং x + y = 1} এবং A = {–2, –1, 0, 1, 2} হলে ডোমেন ও রেঞ্জ কত?
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৮(ক)]

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

দেওয়া আছে, $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$
এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $x + y = 1$
$\therefore y = 1 - x$.

এখন, $x \in A$ এর জন্য y এর মান নির্ণয় করি:

x	–2	–1	0	1	2
y	3	2	1	0	–1

কিন্তু $3 \notin A$ $\therefore (-2, 3) \notin R$

$\therefore R = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $R = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{2, 1, 0, -1\}$

৭২. C = {–1, 0, 1, 2, 3} এবং F = {(x, y) : x ∈ C, y ∈ C এবং y = 2x} হলে অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ কত?
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত: অনুশীলনী-২.২ এর ১৮(খ)]

লিখিত পদ্ধতি [Type-3 (MCQ) এর অনুরূপ]

দেওয়া আছে, $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C$ এবং $y = 2x\}$ এবং $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

এখন, $x \in C$ এর জন্য $y = 2x$ নির্ণয় করি।

x	–1	0	1	2	3
y	–2	0	2	4	6

কিন্তু $-2, 4, 6 \notin C$ $\therefore (-1, -2), (2, 4), (3, 6) \notin F$

$\therefore F = \{(0, 0), (1, 2)\}$

$\therefore$ ডোমেন $F = \{0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 2\}$

৭৩. একটি ফাংশন f : R, f(x) = 2x + 1 দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(2)$ এর মান কত? [৪৪তম বিসিএস]

লিখিত পদ্ধতি [Type-4 (MCQ) এর অনুরূপ]

দেওয়া আছে, $f(x) = y = 2x + 1$

বা, $2x + 1 = y$

বা, $2x = y - 1$

বা, $x = \frac{y-1}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$\therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

৭৪. $f(x) = \frac{3}{x-1}$; $x \ne 1$ হলে $f^{-1}(x)$ = কত?

লিখিত পদ্ধতি [Type-4 (MCQ) এর অনুরূপ]

$y = f(x) = \frac{3}{x-1}$; $x = f^{-1}(y)$; $xy - y = 3$; $x = \frac{y+3}{y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y}$ $\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x}$

৭৫. যদি $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত অনুশীলনী-১.২]

লিখিত পদ্ধতি **[Type-4 (MCQ) এর অনুরূপ]**

দেওয়া আছে, $f : R \to R$ এবং $f(x) = 5x - 4$

এখন, $y = f^{-1}(x)$

বা, $f(y) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে]

বা, $5y - 4 = x$; [$\because f(x) = 5x - 4$]

বা, $5y = x + 4$

বা, $y = \frac{x+4}{5}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$; [$\because y = f^{-1}(x)$]

৭৬. $F : R \to R$, $F(x) = x^3$ ফাংশনের জন্য দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন। *[নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত অনুশীলনী-১.২]*

লিখিত পদ্ধতি **[Type-4 (MCQ) এর অনুরূপ]**

$F(x_1) = F(x_2)$ এর জন্য F এক-এক ফাংশন হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1 = x_2$ হয়। যখন $x_1, x_2 \in$ ডোম F

এখন, $F(x_1) = F(x_2)$

বা, $x_1^3 = x_2^3$

বা, $x_1 = x_2$; [উভয়পক্ষে ঘনমূল নিয়ে]

সুতরাং F এক-এক ফাংশন।

৭৭. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$ । f(x) এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। *[নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত অনুশীলনী-১.২]*

লিখিত পদ্ধতি **[Type-4 (MCQ) এর অনুরূপ]**

f(x) এক-এক ফাংশন কি-না যাচাইকরণ:

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f

এখন, f(x) ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

মনে করি, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\sqrt{x_1 - 4} = \sqrt{x_2 - 4}$

বা, $x_1 - 4 = x_2 - 4$; [বর্গ করে]

$\therefore x_1 = x_2$

অর্থাৎ, $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ ।

অতএব f(x) ফাংশনটি এক-এক।

৭৮. $x + y = 2$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
[নবম-দশম শ্রেণির গণিত অনুশীলনী-২.২]

লিখিত পদ্ধতি

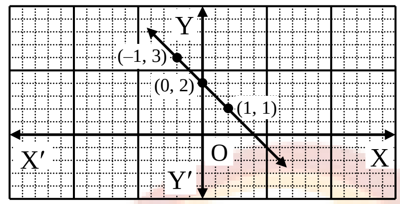
প্রদত্ত ফাংশন: $x + y = 2$

বা, $y = 2 - x$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি

x	0	1	–1
$y = 2 - x$	2	1	3

ছক কাগজে (x, y) বিন্দুগুলো বসিয়ে যোগ করে প্রাপ্ত চিত্রই প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র। x ও y অক্ষকে ক্ষুদ্রতম 2 ঘর একক ধরে।



৭৯. $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত অনুশীলনী-১.২]

লিখিত পদ্ধতি

দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$

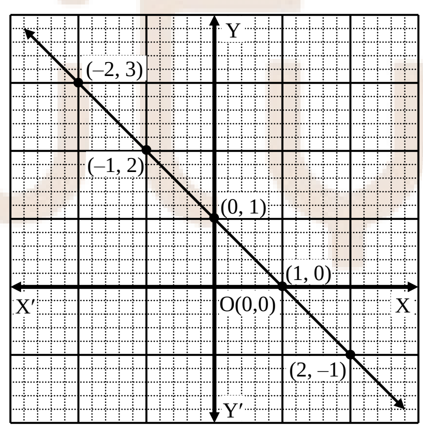
এখানে, S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $x + y = 1$

বা, $y = 1 - x$ থেকে

x ও y-এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	**– 2**	**– 1**	**0**	**1**	**2**
y = 1 – x	**3**	**2**	**1**	**0**	**– 1**

লেখচিত্রে, XOX′-কে x-অক্ষ এবং YOY′-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (–2, 3), (–1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, –1) বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে সরলরেখা পাওয়া যায়। এটি S অন্বয়টির লেখ।



S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সরলরেখাটির প্রতিটি বিন্দুরই প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন। এতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু নেই।

সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

পূর্ণমান : ২০
সময়: ১৫ মিনিট

নিজেকে যাচাই করি

নম্বর	প্রস্তুতি
১৬-২০	খুব ভালো
১২-১৫	মোটামুটি
১২ এর নিচে	অধ্যায়টি আবার পড়ুন

১. **$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ হলে $f(0)$ = কত?**
K 6 L 4
M 1 N –1

২. **যদি $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?**
K 23 L – 7 M $\frac{-7}{16}$ N $\frac{7}{16}$

৩. **$f(n) = \frac{2n+1}{2n-1}$ হলে $f(-2)$ = কত?**
K 3 L –5
M –3/5 N 3/5

৪. **$f(x) = x^3 + kx^2 - 6x - 9$, k এর মান কত হলে $f(3) = 0$ হবে?**
K 1 L 1
M 2 N 0

৫. **$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ এর অনুরূপ কোনটি?**
K $f(-1) = 1$ L $f(0) = 1$
M $f(-1) = 3$ N $f(1) = 1$

৬. **যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?**
K 0 L 2
M 4 N 1

৭. **$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হয়, তবে x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?**
K 1 L 2
M 3 N সবগুলোই

৮. **x, y বাস্তব রাশি এবং $f(x, y) = x^2y^2$, যদি $h(x) = (x^2 - 5)$ হয়, তবে $f(2, h(3))$ এর মান কত?**
K 64 L 16
M 96 N 32

৯. **$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x(1-x)}$ হলে, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ = ?**
K 0 L $f(x)$
M $\frac{1 - 2x + x^3}{x(x-1)}$ N $\frac{1 - 2x + x^3}{x(1-x)}$

১০. **$g(x) = \frac{1 + x^2 + x^4}{x^2}$ হলে, $g\left(\frac{1}{x^2}\right)$ = কত?**
K $\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4}$ L $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4}$
M $\frac{x^2 + x + 1}{x^4}$ N 1

১১. **কোনো ফাংশনের রেঞ্জ কার উপসেট?**
K ডোমেন L কোডোমেন
M অন্বয় N সেট

১২. **$F = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়ের ডোমেন কত?**
K $\{0, 1, -1, 4\}$ L $\{0, 1, 4\}$
M $\{1, 2, 4\}$ N $\{0, 1, -1, 2\}$

১৩. **$F = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (-1, 2)\}$ অন্বয়ের রেঞ্জ কত?**
K $\{0, 1, -1, 2\}$ L $\{0, 2, 4\}$
M $\{0, 1, 2, 4\}$ N $\{1, 2, 4\}$

১৪. **$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ ফাংশনের ডোমেন কত?**
K R L $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
M $x \geq \frac{1}{2}$ N $x \leq \frac{1}{2}$

১৫. **f এর বিপরীত অন্বয়কে কোন প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়?**
K f L $f \times f$
M f^{-1} N $f + f$

১৬. **$A = \{(0, 1), (2, 4), (3, 5)\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় কত?**
K $A^{-1} = \{(1, 0), (4, 2), (5, 3)\}$
L $A^{-1} = \{(1, 0), (4, 2), 5, 3\}$
M $A^{-1} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
N $A^{-1} = \{(5, 3), (2, 4), (0, 1)\}$

১৭. **$f(x) = x^3 - 5$ হলে $f^{-1}(x)$ = কত?**
K $(x - 5)^3$ L $(x - 5)^{\frac{1}{3}}$
M $(x + 5)^3$ N $(x + 5)^{\frac{1}{3}}$

১৮. **নিচের কোনটি এক-এক ফাংশন?**
K $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ L $F(x) = x^2$
M $F(x) = (2x - 1)^2$ N $F(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$

১৯. **$F(x) = \frac{1}{x - 2}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে কোনটি অনির্ণেয়?**
K F(1) L F(0)
M F(2) N F(–1)

২০. **$f(x) = 2x^2$ হলে, $f^{-1}(-2)$ কোনটি?**
K – 1 L 1
M 2 N অসংজ্ঞায়িত

উত্তরমালা

১.	N	২.	M	৩.	N	৪.	N	৫.	K	৬.	L	৭.	N	৮.	K	৯.	M	১০.	K
১১.	L	১২.	N	১৩.	L	১৪.	N	১৫.	M	১৬.	K	১৭.	N	১৮.	K	১৯.	M	২০.	N